Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Informationen zur Vorlesung

Es besteht bei dieser Vorlesung keine Abgabepflicht von Übungsaufgaben. Stattdessen werden jede Woche ein oder mehrere Probleme ausgegeben, über die Sie einige Tage nachdenken können. Die Probleme werden in der nächsten Woche dann in der Übung gemeinsam mit Herrn Stopp bearbeitet. Wenn Sie etwas zu den Problemen abgeben möchten, können Sie dies auf freiwilliger Basis tun.
Die Zulassung zur Abschlussprüfung erwerben Sie durch regelmäßige Teilnahme an Vorlesung und Übung.

Problem 1.
Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X heißt *Topologie auf* X, wenn sie abgeschlossen ist unter beliebigen Vereinigungen und endlicher Durchschnittsbildung, und darüberhinaus $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$ erfüllt. Die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen dann *offene Mengen*. Eine *Umgebung* von $x \in X$ ist eine offene Menge, die x enthält.
Eine Topologie heißt *hausdorffsch*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen U bzw. V von x bzw. y existieren mit $U \cap V = \emptyset$. X heißt dann ein *Hausdorff-Raum*. Im Folgenden seien alle Topologien als hausdorffsch vorausgesetzt.
(i) Rufen Sie sich in Erinnerung, dass eine Topologie in einem (Hausdorff-)Raum automatisch einen Konvergenzbegriff definiert (d.h., dass für jede Folge x_n und jeden Punkt x in Xangegeben wird, ob x_n gegen x konvergiert). Wie konstruieren Sie aus der Topologie den Konvergenzbegriff? Können Sie auch aus dem Konvergenzbegriff die Topologie konstruieren?
(ii) Seien X_i (i läuft durch eine Indexmenge I) eine Familie von topologischen Räumen. Schlagen Sie die Definition der *Produkttopologie* auf $X := \prod X_i$ nach und charakterisieren Sie diese durch eine universelle Abbildungseigenschaft.
(iii) Eine Gruppe G, versehen mit einer (Hausdorff-)Topologie $\mathcal{O}$ auf G heißt *topologische Gruppe*, wenn für alle Mengen $A, B \in \mathcal{O}$ auch

$$\begin{array}{lcc} A^{-1} & := & \{g \in G \mid g^{-1} \in A\} \quad \text{und} \\ A \cdot B & := & \{g \in G \mid \exists\, a \in A, b \in B \,\text{mit}\, g = ab\} \end{array}$$

in $\mathcal{O}$ sind.
Zeigen Sie: Eine Gruppe G mit einer Topologie $\mathcal{O}$ ist genau dann eine topolo-

gische Gruppe, wenn die Multiplikation $\cdot : G \times G \to G$ und die Inversenbildung ${}^{-1} : G \to G$ stetig sind bezüglich $\mathcal{O}$.

(iv) Eine *Umgebungsbasis* einer Topologie $\mathcal{O}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{O}$, sodass zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung $O \in \mathcal{O}$ von x eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ von x existiert mit $U \subseteq O$. Eine Topologie ist durch Angabe einer Umgebungsbasis eindeutig bestimmt. (Warum?)

Zeigen Sie: Ist G eine topologische Gruppe, so ist die Topologie schon durch eine Umgebungsbasis *der 1* eindeutig bestimmt (d.h. durch eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$, sodass für jede Umgebung O von 1 schon eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ von 1 existiert mit $U \subseteq O$).

(v) Eine topologische Gruppe G erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine *abzählbare* Umgebungsbasis der 1 gibt.

Zeigen Sie: In diesem Fall ist G genau dann *kompakt* (d.h., jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung), wenn G *folgenkompakt* ist (d.h., jede Folge in G hat eine konvergente Teilfolge).