Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Problem 2.
Eine Sequenz

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

von endlichen abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen heißt *exakt*, falls das Bild jedes Homomorphismus gleich dem Kern des nächsten ist:

$$\mathrm{im}(f_k) = \ker(f_{k+1})\,.$$

Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz von der Form

$$A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \;,$$

mit einer injektiven Abbildung f und einer surjektiven Abbildung g.
(i) Überlegen Sie, für welche weiteren algebraischen Strukturen die Definition einer exakten Sequenz Sinn macht und finden Sie jeweils Beispiele.
(ii) Jede kurze exakte Sequenz kann auch als exakte Sequenz mit fünf Ausdrücken geschrieben werden. Welche Objekte müssen Sie wo einfügen?
(iii) In welcher Beziehung zueinander stehen die Objekte A, B und C einer kurzen exakten Sequenz?
(iv) Es sei

$$0 \to V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} V_n \to 0$$

eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen $K-$Vektorräumen.
Zeigen Sie: Es gilt

$$\sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \dim(V_i) = 0\,.$$

Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für endliche abelsche Gruppen.
(v) Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von endlichen abelschen Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_4"] & A_5 \arrow[d, "\gamma_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Beweisen Sie das sogenannte *Fünfer-Lemma*: Sind in obigem Diagramm die Zeilen exakt, γ_1 surjektiv, γ_5 injektiv, sowie γ_2 und γ_4 beide Isomorphismen, dann ist auch γ_3 ein Isomorphismus.

(vi) Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von endlichen abelschen Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweisen Sie das sogenannte *Schlangen-Lemma*: Sind in obigem Diagramm die Zeilen exakt, so gibt es eine exakte Folge:

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma)\,.$$