Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,
SS 2013

Problem 2.
Eine Sequenz

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

von endlichen abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen heißt *exakt*, falls das Bild jedes Homomorphismus gleich dem Kern des nächsten ist:

$$\mathrm{im}(f_k) = \ker(f_{k+1})\,.$$

Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz von der Form

$$A \xhookrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ ,$$

mit einer injektiven Abbildung f und einer surjektiven Abbildung g.
(*i*) Überlegen Sie, für welche weiteren algebraischen Strukturen die Definition einer exakten Sequenz Sinn macht und finden Sie jeweils Beispiele.
(*ii*) Jede kurze exakte Sequenz kann auch als exakte Sequenz mit fünf Ausdrücken geschrieben werden. Welche Objekte müssen Sie wo einfügen?
(*iii*) In welcher Beziehung zueinander stehen die Objekte A, B und C einer kurzen exakten Sequenz?
(*iv*) Es sei

$$0 \to V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} V_n \to 0$$

eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen $K-$Vektorräumen.
Zeigen Sie: Es gilt

$$\sum_{0\le i\le n} (-1)^i \dim(V_i) = 0\,.$$

Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für endliche abelsche Gruppen.
(*v*) Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von endlichen abelschen Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_3} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_4} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_5} \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

Beweisen Sie das sogenannte *Fünfer-Lemma*: Sind in obigem Diagramm die Zeilen exakt, γ_1 surjektiv, γ_5 injektiv, sowie γ_2 und γ_4 beide Isomorphismen, dann ist auch γ_3 ein Isomorphismus.

(*vi*) Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von endlichen abelschen Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Beweisen Sie das sogenannte *Schlangen-Lemma*: Sind in obigem Diagramm die Zeilen exakt, so gibt es eine exakte Folge:

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma)\,.$$