Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Problem 3.
Es sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe.
(i) Schlagen Sie in der Literatur die Definition eines linksinvarianten bzw. rechtsinvarianten Maßes ("*Haar-Maß*") nach.
(ii) Es gibt bis auf Skalierung mit einem konstanten Faktor genau ein linksinvariantes und ein rechtsinvariantes Maß. Ist G kompakt, so stimmen die beiden Maße überein. In diesem Fall ist $\mu(G) < \infty$. (Sie brauchen diese Aussagen nicht zu zeigen.)
Bestimmen Sie das Haar-Maß μ für die Gruppen

- $(\mathbb{R}, +)$;
- $(\mathbb{R}^*, \cdot)$;
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ für eine Primzahl p.

(iii) Sei G kompakt und χ ein *Charakter* von G, d.h. ein stetiger Homomorphismus von G nach $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_G \chi(x) d\mu(x) \, .$$

Dabei ist μ das auf $vol_\mu(G) = 1$ normierte Haar-Maß auf G.