Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Problem 4.
Es sei $K = \mathbb{Q}(i)$, $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p} \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{c}$ der zu n gehörige positive Divisor von K.
(i) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Idealklassengruppe $I(\mathfrak{c})/P_{\mathfrak{c}}$.
(ii) Wie groß ist $I(\mathfrak{c})/P_{\mathfrak{c}}$ für $n \leq 13$?
(iii) Konstruieren Sie eine abelsche Körpererweiterung L von K, für welche die Artin-Abbildung

$$I(\mathfrak{c})/P_{\mathfrak{c}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(L/K)$$

wohldefiniert und bijektiv ist, für

- $\mathfrak{c}$ wie oben, $n = 3$;
- $\mathfrak{c}$ wie oben, $n = 5$;
- $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ das von $2 + i$ erzeugte Hautpideal in $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$.

Problem 5.
Es sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $K := \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $G := \mathrm{Gal}(L \mid K) = \{id, \overline{id}\}$.
Weiterhin sei $\sigma : G \to \mathbb{C}^*$ der nichttriviale Charakter von G.
Im Folgenden bezeichne q stets eine Primzahl $\notin \{2, p\}$ und Fr_q den Frobenius-Automorphismus zu q. (Wieso ist dieser durch q wohlbestimmt?)
Zeigen Sie: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und einen Charakter $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$\sigma(Fr_q) = \chi(\overline{q})$$

für alle $q \in \mathbb{P} \setminus \{2, p\}$. Geben Sie N und χ an!
Verallgemeinern Sie ihr Ergebnis auf $L := \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Diese Probleme werden am 23.05.2013 in der Übung besprochen.