Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Problem 6.
Benutzen Sie Satz 2.24 um zu zeigen: Ist $K \mid \mathbb{Q}$ eine nichttriviale endliche Erweiterung, so ist $|D_K| > 1$. Insbesondere ist jeder Zahlkörper K vom Grad $[K : \mathbb{Q}] > 1$ in mindestens einer Primstelle verzweigt. Vergleichen Sie diese Aussage mit der Situation von Problem 7.

Problem 7.
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Wir wissen: $Cl_K \tilde{=} C_2$.
(i) Beschreiben Sie einen Vertreter $\mathfrak{a} \in I_K$ der nichttrivialen Klasse als $\mathbb{Z}$-Modul.
(ii) Finden Sie eine quadratische Erweiterung $L \mid K$, für welche die kanonische Abbildung $Cl_K \to Cl_L$ nicht injektiv ist. D.h. $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L = (\alpha)$ mit $\alpha \in L^*$.
(iii) Zeigen Sie, dass Sie $L \mid K$ wie in (ii) überall unverzweigt wählen können. In diesem Fall induziert die Artin-Abbildung (zusammen mit der angegebenen Formulierung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes) einen Isomorphismus

$$Cl_K \xrightarrow{\tilde{=}} Gal(L \mid K)\,.$$

Insbesondere: Für ein Hauptideal $(\alpha) = \prod_{1\leq i\leq r} \mathfrak{p}_i^{n_i}$ gilt

$$1 = (\alpha, L \mid K) = \prod_i (\mathfrak{p}_i, L \mid K)^{n_i} = \prod_{\substack{1\leq i\leq r \\ n_i \equiv 1\,(mod\,2)}} \varphi_{\mathfrak{p}_i}$$

mit dem Frobenius-Automorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}}$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ von K.

Diese Probleme werden am 29.05.2013 in der Übung besprochen.