Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,
SS 2013

Problem 10.
(i) Berechnen Sie die (absoluten und bedingten) Konvergenzabszissen der folgenden Dirichlet-Reihen $\sum a_n n^{-s}$:

- $a_n = \left(\frac{n}{p}\right)$ mit dem quadratischen Symbol $\left(\frac{-}{p}\right)$ zu einer Primzahl $p > 2$;
- $a_n = \mu(n)$ (Möbius-Funktion) ;
- $a_n = \phi(n)$ (Euler-Funktion).

Wenn Sie für $a_n = \phi(n)$ keine genau Aussage treffen können, so geben Sie zumindest Abschätzungen nach oben und unten an.
(ii) Es sei $N > 0$ und χ ein nicht-trivialer Charakter auf $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ (also ein Homomorphismus nach $\mathbb{C}^*$, der nicht konstant 1 ist). Wir definieren

$$a_n = \begin{cases} \chi(\overline{n}) & , \text{ falls } \mathrm{ggt}(n, N) = 1; \\ 0 & , \text{ sonst;} \end{cases}$$

(dabei bezeichnet $\overline{n}$ die Klasse von n modulo $N\mathbb{Z}$).
Berechnen Sie die Konvergenzabszissen der zugehörigen Dirichlet-Reihe.

Vorsicht: Obige Konstruktion hängt eng mit der Definition eines *Dirichlet-Charakters* zusammen (die noch in der Vorlesung auftauchen wird), ist aber nicht vollkommen identisch.

Problem 11.
Schlagen Sie in einem Buch die Definitionen über unendliche Produkte von komplexen Zahlen und holomorphen/meromorphen Funktionen nach, ebenso wie die Produktdarstellungen einiger klassischer Funktionen.
(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie die Äquivalenz von:

- $\prod a_n$ konvergiert absolut;
- $\sum(a_n - 1)$ konvergiert absolut.

(*ii*) Beweisen Sie die Formel von Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^{-1} .$$

Diese Probleme werden am 20.06.2013 in der Übung besprochen.