Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, SS 2013

Problem 12.
Wir definieren im Bereich $D \subset \mathbb{C}$ der absoluten Konvergenz das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

Bestimmen Sie D und zeigen Sie, dass Γ auf D holomorph ist.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Auf D gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Insbesondere ist

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

(ii) Γ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen an $\{0, -1, -2, \ldots\}$ und mit Residuen

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

und keinen weiteren Polen.
Hinweis: Benutzen Sie die iterierte Funktionalgleichung

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdot \ldots \cdot (s+n)}\,.$$

(iii) Für $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Differenz $\Gamma(s)\Gamma(1-s) - \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ nur hebbare Singularitäten besitzt, und wenden Sie den Satz von Liouville an.

Diese Probleme werden am 27.06.2013 in der Übung besprochen.