Saarland University

Faculty of Mathematics and Computer Science

Einführung in die analytische Zahlentheorie

SS 2016

Prof. Dr. Gekeler

Inhaltsverzeichnis

1 Summenformeln

Schon um 600 v.Chr. war in Babylon bekannt, dass $\sum_{1\leq i\leq n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Archimedes wusste schon um 220 v.Chr., dass $\sum_{1\leq i\leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Die entsprechenden Summenformeln für i^3 bzw. i^4 hat Vieta um 1600 bestimmt. Für die erste haben wir $\sum_{1\leq i\leq n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Definition 1.1. Die k-te Bernoulli-Zahl $B_k \in \mathbb{Q}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ist definiert durch

$$F(t) := \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k\geq 0} \beta_k t^k = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{t^k}{k!},$$

das heißt es gilt, dass $B_k = \beta_k k!$.

Bemerkung. Das oben definierte $F(t)$ beschreibt eine formale Potenzreihe über $\mathbb{Q}$, also $F(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$. Es ist

$$1 = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right) F(t) = (1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \ldots)(B_0 + \frac{B_1}{1!}t + \frac{B_2}{2!}t^2 + \ldots).$$

Für die ersten 12 Bernoulli-Zahlen erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

k	B_k	**k**	B_k
0	1	7	0
1	$-1/2$	8	$-1/30$
2	$1/6$	9	0
3	0	10	$5/66$
4	$-1/30$	11	0
5	0	12	$-691/2730$
6	$1/42$	13	0

Nun möchten wir das k-te Bernoulli-Polynom definieren. Dass es sich hierbei tatsächlich um ein Polynom handelt, werden wir in Proposition 1.3 sehen.

Definition 1.2. Das k-te Bernoulli-Polynom $B_k(X) \in \mathbb{Q}[[X]]$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}(t,X) := F(t)e^{tX} = \frac{t}{e^t-1}e^{tX} = (\sum_{i\geq 0}\beta_i \frac{t^i}{i!})(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}(tX)^j) = \sum_k B_k(X)\frac{t^k}{k!} \in \mathbb{Q}[[t,X]].$$

Bemerkung. Man beachte, dass es sich bei B_k um eine rationale Zahl handelt, wohingegen $B_k(X)$ a priori eine formale Potenzreihe aus $\mathbb{Q}[[X]]$ beschreibt. Es gibt jedoch einen Zusammenhang, namentlich gilt $B_k(0) = B_k$.

Proposition 1.3. *(i) Für $k \geq 3$ und k ungerade gilt: $B_k = 0$.*

(ii) Es gilt: $B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{0\leq i<k}\binom{k+1}{i}B_i$.

(iii) Das k-te Bernoulli-Polynom ist tatsächlich ein Polynom. Genauer: $B_k(X)$ ist ein normiertes Polynom des Grades k mit:

$$B_k(X) = \sum_{0\leq i\leq k}\binom{k}{i}B_i X^{k-i} = \sum_{0\leq i\leq k}\binom{k}{i}B_{k-i}X^i.$$

Insbesondere ist $B_k(0) = B_k$.

(iv) Wir haben $B_k(X+1) - B_k(X) = k \cdot X^{k-1}$.

(v) Für die formale Ableitung des Bernoulli-Polynoms gilt: $B_k'(X) = k \cdot B_{k-1}(X)$.

Beweis. (i) Es gilt:

$$F(t) - F(-t) = \frac{t}{e^t-1} - \frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{te^t}{1-e^t} = \frac{t}{e^t-1}(1-e^t) = -t.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung.

(ii) Auch hier folgt die Behauptung mittels Koeffizientenvergleich unter Beachtung, dass

$$1 = \left(\frac{e^t-1}{t}\right)\left(\frac{t}{e^t-1}\right) = (\sum_{i\geq 0}\frac{t^i}{(i+1)!})(\sum_{j\geq 0}B_j\frac{t^j}{j!})$$

gilt.

(iii) Es ist

$$(\sum_{k\geq 0} B_k(X)\frac{t^k}{k!}) = \mathcal{F}(t,X) = F(t)e^{tX} = (\sum_{i\geq 0} B_i\frac{t^i}{i!})(\sum_{j\geq 0} = \frac{1}{j!}X^j t^j).$$

Für den k-ten Koeffizienten erhalten wir

$$\frac{B_k(X)}{k!} = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} (\frac{B_i}{i!}\frac{X^j}{j!}) = \frac{1}{k!}\sum_{0\leq i\leq k}\binom{k}{i}B_i X^{k-i}.$$

(iv) Betrachte

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}(B_k(X+1)-B_k(X))\frac{t^k}{k!} &= \mathcal{F}(t,X+1)-\mathcal{F}(t,X) = \frac{t}{e^t-1}(e^{t(X+1)}-e^{tX})\\ &= \frac{t}{e^t-1}e^{tX}(e^t-1) = te^{tX} = t\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}X^k t^k.\end{aligned}$$

Der Vergleich des Vorfaktors von t^k liefert

$$\frac{B_k(X+1)-B_k(X)}{k!} = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Wir erhalten das Gewünschte bei Multiplikation der Gleichung mit $k!$.

(v) Die Aussage folgt mit (iii) und den Regeln für Binomialkoeffizienten.

□

Definition 1.4. Für k und N aus $\mathbb{N}_0$ sei

$$S_k(N) := \sum_{1\leq i<N} i^k.$$

Für N gleich 0 oder 1 setze $S_k(N) = 0$.

Satz 1.5. *Für k und N aus $\mathbb{N}$ und $k \neq 1$ gilt:*

$$S_{k-1}(N) = \frac{B_k(N)-B_k}{k}.$$

Für $k = 1$ haben wir $B_1(N) - B_1 = S_0(N+1)$.

Beweis. Wegen

$$B_k(N) - B_k = B_k(N) - B_k(N-1) + B_k(N-1) - B_k(N-2) + \cdots + B_k(1) - B_k(0)$$

folgt mit Proposition 1.3 (iv), dass

$$\begin{aligned} B_k(N) - B_k &= k(N-1)^{k-1} + k(N-2)^{k-1} + \cdots + k \cdot 0^{k-1} \\ &= k \sum_{1 \leq i < N} i^{k-1} = kS_{k-1}(N). \end{aligned}$$

Da für $k = 1$ gilt, dass $0^{k-1} = 1$ ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Somit können wir die Bernoulli-Polynome bestimmen und wir erhalten für die ersten fünf: $B_1(X) = X - 1/2$, $B_2 = X^2 - X + 1/6$, $B_3(X) = X^3 - 3/2X^2 + 1/2X$, $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30$ und $B_5(X) = X^5 - 5/2X^4 + 5/3X^3 - 1/6X$. Jetzt können wir ohne Weiteres die Potenzsumme $\sum_{1 \leq i \leq N} i^4$ bestimmen. Es ist:

$$S_4(N+1) = \sum_{1 \leq i \leq N} i^4 = 1/5N^5 + 1/2N^4 + 1/3N^3 - 1/30N.$$

Lemma 1.6. *(Abel-Summation) Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$. Sei $A_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$ die N-te Partialsumme mit $A_0 = 0$. Dann gilt:*

$$\sum_{1 \leq n \leq N} a_n b_n = \sum_{1 \leq n < N} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq N} a_n b_n = \sum_{1 \leq n \leq N} (A_n - A_{n-1}) b_n &= \sum_{1 \leq n \leq N} A_n b_n - \sum_{0 \leq n \leq N-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{1 \leq n < N} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N. \end{aligned}$$

□

1.7 Erinnerung/Ergänzung zu Riemann-Stieltjes-Integralen

Definition 1.7.1. (Riemann-Stieltjes-Integral) Seien $I = [a, b]$ ein Intervall aus $\mathbb{R}$, f und α Funktionen von I nach $\mathbb{R}$ und $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Unterteilung von I mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Die Feinheit von Δ sei gegeben durch

$$|\Delta| := \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Sei $\underline{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ ein Zwischenwertvektor mit $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ für $0 \leq i < n$. Dann ist die Riemann-Stieltjes-Summe wie folgt definiert:

$$\mathrm{RS}(\underline{\xi}, \Delta, f, \alpha) := \sum_{0 \leq i \leq n} f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)).$$

(Ist $\alpha = id$, also $\alpha(x) = x$, so haben wir eine gewöhnliche Riemann-Summe.) Gilt nun, dass für jede Folge von Unterteilungen $(\Delta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und Zwischenwertvektoren $\underline{\xi}^{(k)}$ bezüglich $\Delta^{(k)}$ mit $|\Delta^{(k)}| \to 0$ der Limes $\lim_{k\to\infty} \mathrm{RS}(\underline{\xi}^{(k)}, \Delta^{(k)}, f, \alpha)$ existiert und dieser unabhängig von der Folge $\Delta^{(k)}$ und den Zwischenwertvektoren $\underline{\xi}^{(k)}$ ist, so heißt f RS-integrierbar bzgl. α und der Wert des Limes heißt das RS-Integral $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ von f bzgl. α.

Definition 1.7.2. (Funktionen beschränkter Variation) Eine Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ hat beschränkte Variation, falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\sup_{\Delta=(x_0,\ldots,x_n)} \sum_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq c,$$

wobei das Supremum über alle Unterteilungen Δ von I läuft. Die totale Variation $v(f)$ von f auf I ist gegeben durch $v(f) = v_I(f) = \inf\{\text{c} \mid \text{c wie oben}\}$.

Bemerkung. Die Menge $\widetilde{V} := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | v(f) < \infty\}$ der Funktionen mit beschränkter Variation ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die totale Variation $v : \widetilde{V} \to \mathbb{R}$ induziert eine Norm auf dem Quotientenraum $V := \widetilde{V}/\mathbb{R}$ nach dem eindimensionalen Unterraum $\mathbb{R}$ der konstanten Funktionen, bezüglich der V vollständig ist.

Notation 1.7.3. Sei D eine Teilmenge aus $\mathbb{R}$. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $x \in D$ sei $f(x+) := \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x + h)$ und $f(x-) := \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x - h)$, vorausgesetzt die Limites existieren.

1.8 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Im folgenden seien $I = [a,b]$ mit $a < b$, f und α reellwertige Funktionen auf I.

(1) $$\int_a^b d\alpha(x) = \alpha|_a^b = \alpha(b) - \alpha(a)$$

(2) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0, \text{ falls } \alpha \text{ konstant}$$

(3) Ist f stetig und α Treppenfunktion mit Sprungstellen $x_1, \dots, x_n \in I$, so ist

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{1 \le i \le n} f(x_i)[\alpha(x_i+) - \alpha(x_i-)].$$

(4) Ist f stetig, α eine C^1-Funktion (d.h. stetig differenzierbar), so ist

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \quad \text{(Riemann-Integral).}$$

(5) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x) \text{ ist linear in } f \text{ und } \alpha.$$

(6) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

existiert, falls f stetig und α von beschränkter Variation oder f von beschränkter Variation und α stetig ist. Ist eine dieser Voraussetzungen erfüllt, so gilt

(7) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = (f\alpha)|_a^b - \int_a^b \alpha(x)df(x) \text{ (Partielle Integration).}$$

(8) Sei f stetig, α von beschränkter Variation. Dann gilt für jedes $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x).$$

(Vorsicht: Aus der Existenz der beiden Integrale rechts folgt *nicht* die des linken Integrals!)

(9) Sei f stetig und α von beschränkter Variation. Dann hat F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)d\alpha(t)$$

beschränkte Variation (ist aber i.a. nicht stetig!). Es ist

$$\begin{aligned} F(x+) - F(x) &= f(x)[\alpha(x+) - \alpha(x)], \quad x \in [a, b) \\ F(x) - F(x-) &= f(x)[\alpha(x) - \alpha(x-)], \quad x \in (a, b]. \end{aligned}$$

Schreibe $\int_{a+}^b f(x)d\alpha(x)$ für $F(b) - F(a+)$, etc. Beweise und Ergänzungen z.B. in D.V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press 1946, Kap. I. Dazu gehören insbesondere:

- Abschätzungen für $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, falls Abschätzungen für f und α vorliegen;
- Vertauschung von Summen und Limites mit Integralen;
- Substitutionsregel;
- uneigentliche Riemann-Stieltjes Integrale.

Proposition 1.9. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, x eine reelle Zahl und $A(x) := \sum_{1\le n\le x} a_n$ und b aus $C^1[1, x]$. Dann ist*

$$\sum_{1\le n\le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x b'(t)A(t)dt.$$

Beweis. Mit den Eigenschaften des Riemann-Stieltjes Integrals folgt, da A eine Treppenfunktion beschreibt, dass

$$\sum_{1\le n\le x} a_n b(n) = \int_{1-}^x b(t)dA(t).$$

Partielle Integration führt zu

$$(Ab)|_{1-}^x - \int_{1-}^x b'(t)A(t)dt.$$

Da nach Definition $A(-1) = 0$ ist, folgt

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x b'(t)A(t)dt.$$

□

Proposition 1.10. *Sei f eine monotone Funktion auf dem Intervall $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann existiert ein Θ aus $[0, 1]$ mit*

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \Theta(f(b) - f(a)).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. f monoton steigend. Schreibe $t \in [a, b]$ als die Summe seines ganzen und gebrochenen Anteils, also $t = [t] + \{t\}$ mit $\{t\} \in [0, 1)$. Es ist

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t)d[t]$$

und wegen der Linearität folgt

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) - \int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(t)d\{t\}.$$

Partielle Integration liefert

$$-\int_a^b f(t)d\{t\} = -f(t)\{t\}|_a^b + \int_a^b \{t\}df(t) = \int_a^b \{t\}df(t).$$

Letzteres ist gleich $\Theta(f|_a^b)$ für ein $\Theta \in [0, 1]$ mit den Zwischenwertsätzen für gewöhnliche Summen bzw. Integrale, da df positiv, $0 \leq \{t\} < 1$ und $\int_a^b df(t) = f(b) - f(a)$ ist. □

Beispiel 1.11. Sei $f(x) := \log(x)$ mit Stammfunktion $F(x) = x \cdot \log(x) - x$. Dies liefert

$$\log(b!) = \sum_{1 < n \leq b} \log(n) = b \cdot \log(b) - b + 1 + \Theta \cdot \log(b),$$

mit $\Theta \in [0, 1]$. Wir haben also die Gleichheit $b! = (\frac{b}{e})^b \cdot e \cdot b^\Theta$, was schon große Ähnlichkeit mit der Stirling-Formel hat, welche da lautet: $b! \sim (\frac{b}{e})^b \sqrt{2\pi b}$, wobei

„~“ für „asymptotisch äquivalent“ steht.

Proposition/Definition 1.12. *Für k aus $\mathbb{N}_0$ sei $\beta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die wohlbestimmte $\mathbb{Z}$-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$, die auf dem Intervall $[0,1)$ mit $B_k(X)$ übereinstimmt. Sie heißt die k-te Bernoulli-Funktion. Es gelten:*

(i) *Für $k \geq 2$ ist β_k stetig.*

(ii) *Für $k \geq 3$ ist β_k differenzierbar mit $\beta_k' = k\beta_{k-1}$.*

Beweis. Die Gleichung $B_k(X+1) - B_k(X) = kX^{k-1}$ zeigt, dass für $k \geq 2$ gilt: $B_k(1) = B_k(0)$, d.h. der Graph von $\beta_k|_{[1,2)}$ passt sich an den von $\beta_k|_{[0,1)}$ an, also gilt (i).

Ebenso ist für $k \geq 3$

$$B_k'(1) - B_k'(0) = k(k-1)X^{k-2}|_0 = 0,$$

d.h. wir haben für $x = 1, 2, 3, ...$ „glatte Übergänge“. Die Gleichung $\beta_k' = k\beta_{k-1}$ folgt aus der entsprechenden Gleichung für die Bernoulli-Polynome B_k. $\square$

Sei jetzt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^{k+1}-Funktion, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir wollen die Summe $\sum_{a<n\leq b} f(n)$ noch etwas genauer als in Proposition 1.10 berechnen. Es gilt:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)d[t] = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)d\beta_1(t),$$

da $\beta_1(x) = B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$ und damit $d\beta_1 = d\{x\}$. Weiter ist

$$\int_a^b f(t)d\beta_1(t) = (f\beta_1)|_a^b - \int_a^b \beta_1(t)f'(t)dt.$$

Letzteres ist wegen $\beta_1(a) = \beta_1(b) = B_1(0) = B_1$ und $d\beta_2(t) = \beta_2'(t)dt = 2\beta_1(t)$ auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ nach Definition/Proposition 1.12 gleich

$$B_1 \cdot (f(b) - f(a)) - 1/2 \int_a^b f'(t)d\beta_2(t).$$

Das letztere Integral kann erneut geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)d\beta_2(t) &= (f'\beta_2)|_a^b - \int_a^b f''(t)\beta_2(t)dt \\ &= B_2 \cdot (f'(b) - f'(a)) - 1/3 \int_a^b f''(t)d\beta_3(t).\end{aligned}$$

Führen wir dies k-mal durch, so erhalten wir

Satz 1.13. (Summenformel von Euler-Maclaurin) Gegeben sei das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und eine Funktion f aus $C^{k+1}[a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^{i+1}\frac{B_{i+1}}{(i+1)!}(f^{(i)}(b) - f^{(i)}(a)) \\ + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \beta_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)dt.\end{aligned}$$

Satz 1.14.*Es existiert eine Konstante γ aus $\mathbb{R}$, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{\Theta_N}{60N^4},$$

wobei $\Theta_N \in [0, 1]$. Es ist $\gamma = 0,57721566...$, die Euler(-Mascheroni)-Konstante.

Beweis. Benutzen wir Satz 1.13 mit $f(t) = 1/t$, $a = 1$, $b = N$ und $k = 3$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq N} \frac{1}{n} =& \log N + 1/2(\frac{1}{N} - 1) + 1/12(\frac{-1}{N^2} + 1) \\ &+ 0 + \frac{-1/30}{4!}(-6t^{-4})|_1^N + 1/4!\int_1^N \beta_4(t)24t^{-5}dt.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n} = \log N + \frac{1}{2N} + 1/2 - \frac{1}{12N^2} + 1/12 + \frac{1}{120N^4} - 1/120 + \int_1^N \beta_4(t)t^{-5}dt,$$

und folglich

$$\sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n} - \log N = 69/120 + \int_1^N \beta_4(t)t^{-5}dt + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} \quad (*)$$

Wegen $|\beta_4(t)| \leq 1/30 \; \forall t \in \mathbb{R}$ (Übungsaufgabe), ist

$$|\int_N^\infty \beta_4(t)t^{-5}dt| \leq 1/30 \int_N^\infty t^{-5}dt = 1/120 \cdot N^{-4}.$$

Mittelwertsätze der Integralrechnung liefern uns ein Θ'_N aus $[-1,1]$ mit $\int_N^\infty \beta_4(t)t^{-5}dt = \frac{\Theta'_N}{120N^4}$. Die rechte Seite von $(*)$ konvergiert für $N \to \infty$ gegen $69/120 + \int_1^\infty \beta_4(t)t^{-5}dt =:$ γ, und es ist

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} - \log N - \gamma = \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} + \frac{\Theta'_N}{120N^4}.$$

Setzen wir nun $\Theta_N := \frac{\Theta'_N + 1}{2} \in [0,1]$, so folgt die Behauptung. □

Eine entsprechend feinere Auswertung von $\sum_{i \leq n} \log(i)$ mittels der Euler-Maclaurin-Formel der Ordnung $k = 0$, $k = 1$ bzw. $k = 2$ liefert (ohne Beweis)

Satz 1.15. Es gilt $n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{R_n}$, mit

$0 \leq R_n \leq \frac{1}{8n} \quad (k = 0)$;

$\frac{1}{12n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{12n} \quad (k = 1)$;

$\frac{1}{12n+1/4} \leq R_n \leq \frac{1}{12n} \quad (k = 2)$.

Deshalb ist $\tilde{n} := (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}$ eine besonders gute Approximation für $n!$. Wir haben folgende Werte:

n	$n!$	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$	$\tilde{n}$
2	2	1,919...	2,00065...
5	120	118,019...	120,0026...
10	3628800	3598695,6...	3628810,0...

2 Die Riemannsche Zetafunktion

Erinnerung/Ergänzung zu unendlichen Produkten/Potenzreihen:

(1) Sei $l(X) := \sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1}\frac{X^i}{i} = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - ... \in \mathbb{R}[[X]]$. Es gelten

(i) Der Konvergenzradius $\rho(l)$ ist 1;

(ii) für die formale Ableitung von l gilt: $l'(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i X^i = \frac{1}{1+X}$;

(iii) mit $e(X) := \sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{n!}$ gilt: $e(l(X)) = 1 + X$.

(2) Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einen Folge in $\mathbb{C}$. Wir sagen, dass das Produkt $\Pi_{i\geq 1}x_i$ absolut konvergiert, falls

(i) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 1$ und

(ii) $\exists N \forall i \geq N : |x_i - 1| < 1$ und sodass $\sum_{i>N}\log x_i$ absolut konvergiert.

In diesem Fall setzen wir $\Pi_{i\geq 1}x_i := \Pi_{i\leq N}x_i \cdot e^{\sum_{i>N}\log x_i}$. Sind (i) und (ii) erfüllt, so gelten

(a) $\Pi_{i\geq 1}x_i$ ist unabhängig von der Wahl von N;

(b) $\Pi_{i\geq 1}x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\Pi_{1\leq i\leq n}x_i$;

(c) jede Umordnung von $\Pi_{i\geq 1}x_i$ konvergiert ebenfalls absolut, mit demselben Wert;

(d) alle Teilprodukte sind ebenfalls absolut konvergent.

(3) Für $n \in \mathbb{N}$, $s = x + iy \in \mathbb{C}$ mit x und y aus $\mathbb{R}$ ist

$$n^s = n^x \cdot n^{iy} = e^{x\log n} \cdot e^{iy\log n} = e^{x\log n}[\cos(y\log n) + i\sin(y\log n)],$$

wobei der erste Faktor reell und echt größer 0 ist und der zweite Faktor vom Absolutbetrag 1 ist. Insbesondere hängt $|n^s| = n^{Re(s)}$ nur von $x = Re(s)$ ab. Weiter gilt: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ konvergiert absolut für $Re(s) > 1$.

Definition 2.1. Die Riemannsche Zetafunktion ist für $s \in \mathbb{C}$ und $Re(s) > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Nach der Vorbemerkung konvergiert diese Summe absolut und definiert auf $\{s \in \mathbb{C} | Re(s) > 1\}$ eine komplexwertige Funktion.

Bemerkung. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $\{s \in \mathbb{C}|Re(s) \geq 1 + \delta\}$ für alle $\delta > 0$. Deshalb ist $\zeta(s)$ stetig auf $\{s \in \mathbb{C}|Re(s) > 1\}$.

Satz 2.2. *Für $Re(s) > 1$ konvergiert das unendliche Produkt*

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

absolut und stimmt mit $\zeta(s)$ überein.

Beweis. (i) Sei $0 < \delta < 1$. Es existiert ein $C = C(\delta)$ mit:

$$h := |z| \leq \delta \Rightarrow |\log(1 + z)| \leq C|z|.$$

Weiterhin ist

$$|\log(1 + z)| \leq \sum_{i \geq 1} \frac{h^i}{i} = |\log(1 - h)| \leq C(\delta) \cdot h,$$

wegen der stetigen Differenzierbarkeit von „ log “ auf dem kompakten Intervall $[1 - \delta, 1 + \delta]$.

(ii) Das Produkt $\prod_{p \in \mathbb{P}}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Summe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - \frac{1}{p^s})$ absolut konvergiert. Für $Re(s) > 1$ ist $|p^{-s}| < 1/2$, also folgt mit $C = C(1/2)$:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} |\log(1 - \frac{1}{p^s})| \leq C \sum_{p \in \mathbb{P}} |p^{-s}| \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}} |n^{-s}| = C \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-x} < \infty,$$

d.h. das Produkt konvergiert absolut.

(iii) Sei nun $\mathbb{P}(x) := \{p \in \mathbb{P} | p \leq x\}$ mit x aus $\mathbb{R}$, und $\mathbb{N}(x) := \{n \in \mathbb{N}|$ n hat nur Primfaktoren aus $\mathbb{P}(x)\}$. Betrachte die geometrische Reihe $\Pi_{p \in \mathbb{P}(x)}(1 +$

$p^{-s} + p^{-2s} + ...)$ von $\Pi_{p\in\mathbb{P}(x)}(1-p^{-s})^{-1}$. Unter Ausnutzung der eindeutigen Primfaktorzerlegung und Umordnung liefert das Ausmultiplizieren endlich vieler Faktoren

$$\prod_{p\in\mathbb{P}(x)}(1+p^{-s}+p^{-2s}+...) = \sum_{n\in\mathbb{N}(x)} n^{-s} \qquad (*).$$

Die absolute Konvergenz dieser Summe rechtfertigt nachträglich die Umordnung. Es ist

$$|\zeta(s) - \sum_{n\in\mathbb{N}(x)} n^{-s}| = |\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}(x)} n^{-s}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}(x)} n^{-Re(s)} \leq \sum_{n>x} n^{-Re(s)},$$

was für $x\to\infty$ gegen 0 konvergiert. Deshalb geht $\sum_{n\in\mathbb{N}(x)} n^{-s}$ für $x\to\infty$ gegen $\zeta(s)$; da $\Pi_{p\in\mathbb{P}(x)}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\in\mathbb{P}(x)}(1+p^{-s}+p^{-2s}+...)$ gegen $\Pi_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}$ geht, sind wir wegen $(*)$ fertig.

□

Bemerkung.

(a) Als direkte Konsequenz des Satzes folgt, dass $\zeta(s)$ ungleich 0 ist für $Re(s) > 1$.

(b) Die Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ und von $\Pi_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}$ ist sogar gleichmäßig auf Teilräumen von $\mathbb{C}$ der Form $\{z\in\mathbb{C}|Re(z)\geq 1+\delta\}$ für $\delta > 0$.

Probleme 2.3. (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P((m,n)=1)$ dafür, dass zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen m,n teilerfremd sind? Ein Experiment liefert ungefähr 61%. Eine naive Modellierung würde wie folgt aussehen:

$$P((m,n)=1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{(m,n)\in\mathbb{N}^2|m\leq n\leq x, (m,n)=1\}}{\#\{(m,n)\in\mathbb{N}^2|m\leq n\leq x\}}.$$

Existiert der Limes?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(n \text{ quadratfrei})$ dafür, dass eine zufällig gewählte natürliche Zahl n quadratfrei ist? Naive Modellierung:

$$P(n \text{ quadratfrei}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{n\in\mathbb{N}|n\leq x, n \text{ quadratfrei}\}}{\#\{n\in\mathbb{N}|n\leq x\}}.$$

Heuristische Überlegungen:

(a) Es gilt

$$(m,n) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m,n) \not\equiv (0,0) \mod 2 \\ (m,n) \not\equiv (0,0) \mod 3 \\ \vdots \end{cases}$$

für alle Primzahlen 2,3,... D.h. betrachten wir für jedes $p \in \mathbb{P}$ die Restklasse ($\mod p$) von (m,n) als Zufallsvariable Z_p, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht gleichzeitig durch p teilbar zu sein, gegeben durch $\frac{p^2-1}{p^2} = 1 - p^{-2}$. Nimmt man an, dass die Z_p stochastisch unabhängig sind, so ist/sollte sein:

$$P((m,n) = 1) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - p^{-2}) = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

(b) Mit ähnlichen Überlegungen erhalten wir:

$$n \text{ quadratfrei} \Leftrightarrow \begin{cases} n \not\equiv 0 \mod 2^2 \\ n \not\equiv 0 \mod 3^2 \\ \vdots \end{cases}$$

Wir erwarten also ebenfalls

$$P(n \text{ quadratfrei}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^2-1}{p^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Das sind gute Gründe dafür, $\zeta(2)$ zu bestimmen.

Entsprechend sollte/wird für $2 \leq k \in \mathbb{N}$ gelten:

$$P((m_1,\dots,m_k) \in \mathbb{Z}^k | m_1,\dots,m_k \text{ teilerfremd}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^k-1}{p^k} = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-k}) = \zeta(k)^{-1}$$

$$= P(n \text{ enthält keine } k\text{-ten Potenzen}).$$

Satz 2.4. *(Euler 1735)*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. (Calabi, 1985) Sei $I = [0,1]$. Wir berechnen das uneigentliche Riemann-

Integral $\int_I \int_I (1-x^2y^2)^{-1} dxdy$ auf zwei verschiedene Weisen.

(i) Falls $x^2y^2 < 1$, so ist $(1-x^2y^2)^{-1} = 1 + x^2y^2 + x^4y^4 ...$ absolut konvergent. Also ist für $I_\epsilon := [0, 1-\epsilon]$

$$\begin{aligned}\int_{I_\epsilon} \int_{I_\epsilon} (1-x^2y^2)^{-1} dxdy &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{I_\epsilon} \int_{I_\epsilon} x^{2i} y^{2i} dxdy \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{(1-\epsilon)^{2(2i+1)}}{(2i+1)^2} \longrightarrow \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)^2},\end{aligned}$$

für $\epsilon \to 0$. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)^2} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} - 1/4 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \\ &= (1 - 1/4)\zeta(2) = 3/4\zeta(2).\end{aligned}$$

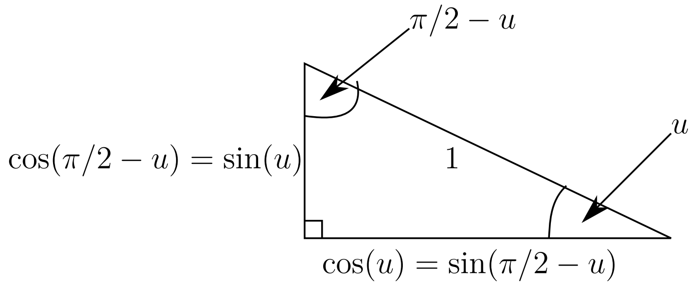
(ii) Wir brauchen das

Lemma 2.5. *Sei* $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u, v \geq 0, u+v \leq \pi/2\}$ *mit Innerem* $\mathring{\Delta} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u, v > 0, u+v < \pi/2\}$*. Die Abbildung*

$$\phi : \mathring{\Delta} \to \mathring{I} \times \mathring{I}; (u,v) \mapsto \left(\frac{\sin(u)}{\cos(v)}, \frac{\sin(v)}{\cos(u)}\right)$$

ist eine Bijektion mit $\mathring{I} \times \mathring{I} = (0,1) \times (0,1)$.

Beweis. Seien u, v aus Δ gegeben. Wegen $\cos(v) > \cos(\pi/2 - u)$, da $v < (\pi/2 - u)$ und der folgenden Skizze



gilt, dass unter den gegebenen Bedingungen $0 < \sin(u) < \cos(v)$ und entsprechend $0 < \sin(v) < \cos(u)$. Deshalb nimmt die Abbildung φ Werte in

$\mathring{I} \times \mathring{I}$ an. Setze $x := \frac{\sin u}{\cos v}$ und $y := \frac{\sin v}{\cos u}$. Dann ist $\sin^2 u = x^2 \cos^2 v$ und $\sin^2 v = y^2 \cos^2 u$. Also $\cos^2 v + y^2 \cos^2 u = 1$ und damit

$$\begin{aligned}\cos^2 v = 1 - y^2 \cos^2 u &= 1 - y^2(1 - x^2 \cos^2 v) \\ &= 1 - y^2 + x^2 y^2 \cos^2 v\end{aligned}$$

Wir erhalten also $\cos^2 v = \frac{1-y^2}{1-x^2y^2}$ und entsprechend $\cos^2 u = \frac{1-x^2}{1-x^2y^2}$. Also ist

$$v = \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}},$$

$$u = \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}},$$

wobei $\arccos : (0,1) \to (0, \pi/2)$ die Umkehrabbildung zu cos ist und es gilt $\varphi^{-1}(x,y) = (u,v)$ mit u, v wie oben. □

(iii) Seien die Bezeichnungen wie in Lemma 2.5. Es ist

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} \\ &= 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2 y^2.\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\int_{\mathring{I}} \int_{\mathring{I}} (1 - x^2y^2)^{-1} dxdy = \int_I \int_I (1 - x^2y^2)^{-1} dxdy = \iint_{\Delta} dudv = \frac{\pi^2}{8}.$$

Damit haben wir also insgesamt $3/4 \cdot \zeta(2) = \pi^2/8$, also $\zeta(2) = \pi^2/6$.

□

Satz 2.6. *Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt:*

$$\zeta(k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k.$$

Bemerkung.

(i) Wir erhalten folgende Beispiele für den Satz:

$$\begin{aligned}
k=2:\zeta(2) &= -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^2}{2}\frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6},\\
k=4:\zeta(4) &= -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^4}{24}(-\frac{1}{30}) = \frac{2^4\cdot\pi^4}{2\cdot 24\cdot 30} = \frac{\pi^4}{90},\\
k=6:\zeta(6) &= \cdots = \frac{\pi^6}{945}.
\end{aligned}$$

(ii) Die Sätze 2.4 und 2.6 geben uns für gerade k die Lösung für die Probleme aus 2.3 (zumindest dann, wenn wir der Heuristik vertrauen). Z.B. ist dann

$$P(n \text{ frei von 4. Potenzen}) = \frac{1}{\zeta(4)} = \frac{90}{\pi^4} \approx 1,0083^{-1} \approx 0,9239...$$

Beweis. (von 2.6)

(i) Betrachte den an $z=0$ stetig hebbaren Ausdruck

$$\begin{aligned}
z\cot z = z\frac{\cos z}{\sin z} &= z\frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} =\\
&= iz\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1} = iz + F(2iz),
\end{aligned}$$

mit $F(X)=\frac{X}{e^X-1}$. Also ist

$$z\cot z = iz + \sum_{k\geq 0}(2i)^k\frac{B_k}{k!}z^k = \sum_{\substack{k\geq 0\\ k\neq 1}}(2i)^k\frac{B_k}{k!}z^k.$$

(ii) Erinnerungen:

- Es ist $\sin z = z\Pi_{n\geq 1}(1-z^2/(n^2\pi^2))$ ein absolut konvergentes Produkt für $z\notin\pi\mathbb{Z}$, und normal konvergent (also: die Folge der Teilprodukte ist im Sinne der Supremumsnorm konvergent) auf abgeschlossenen Kreisscheiben, die disjunkt zu $\pi\mathbb{Z}$ sind (siehe Analysis I).
- Sei f eine Funktion ohne Nullstellen und $L(f) := f'/f$ $(= (\log f)'$, falls

$\log f$ definiert ist). Dann gilt für $i \in \mathbb{N}$

$$L(fg) = L(f) + L(g),$$
$$L(\prod_{1\le i\le n} f_i) = \sum_{1\le i\le n} L(f_i),$$

und sinngemäß auch

$$L(\prod_{i\ge 1} f_i) = \sum_{i\ge 1} L(f_i),$$

falls das Produkt absolut und lokal normal konvergiert.

Wende nun L auf $\sin z = z\Pi_{n\ge 1}(1 - z^2/(n^2\pi^2))$ an und erhalte

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = L(\sin z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\ge 1} L(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}),$$

also

$$\begin{aligned} z\cot z &= 1 + 2\sum_{n\ge 1} \frac{z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = 1 - 2\sum_{n\ge 1} \frac{\frac{z^2}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}} \\ &= 1 - 2\sum_{n\ge 1}\sum_{k\ge 1}(\frac{z^2}{n^2\pi^2})^k. \end{aligned}$$

Für $|z| < \pi$ konvergiert die Doppelsumme absolut, also ist Umordnung erlaubt und wir erhalten:

$$\begin{aligned} z\cot z &= 1 - 2\sum_{k\ge 1} \pi^{-2k}(\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{2k}})z^{2k} = 1 - 2\sum_{k\ge 1}\pi^{-2k}\zeta(2k)z^{2k} \\ &= 1 - 2\sum_{\substack{k\ge 2\\ k \text{ gerade}}} \pi^{-k}\zeta(k)z^k. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (i) zeigt: Für gerade $k \ge 2$ gilt

$$(2i)^k\frac{B_k}{k!} = -2\pi^{-k}\zeta(k), \text{ bzw. } \zeta(k) = -1/2\cdot(2\pi i)^k\frac{B_k}{k!}.$$

□

Korollar 2.7. *Für gerades $k = 2l > 0$ ist $B_k \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(B_k) = (-1)^{l-1}$.*

Die Folge $\zeta(k)$ konvergiert rasch gegen 1:

n	$\approx \zeta(n)$	n	$\approx \zeta(n)$
2	1,64493	6	1,01734
3	1,20205	7	1,00834
4	1,08232	8	1,00407
5	1,03692		

Deshalb ist für $k = 2l$ gerade und $k >> 0$

(2.8)
$$B_k \approx -\frac{2k!}{(2\pi i)^k} = (-1)^{l-1}\frac{2(2l)!}{(2\pi)^{2l}}.$$

Ergänzungen.

- Die arithmetische Natur von $\zeta(2k+1)$ ist nicht bekannt, außer: $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Apéry 1985).
- ζ ist holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 1\}$, holomorph fortsetzbar auf $\mathbb{C}$ mit einzigem Pol an $s = 1$. Dieser ist einfach mit Residuum 1, d.h. $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$.
- Die Gamma-Funktion ist gegeben durch $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ für $Re(s) > 0$. Es ist $\Gamma(n+1) = n!$ und $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Für $Z(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(2)$ gilt für alle $s \in \mathbb{C} : Z(s) = Z(1-s)$.
- Die Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen bei $-2k$ ($k \in \mathbb{N}$) („triviale Nullstellen“) oder in $\{s \in \mathbb{C} | 0 < Re(s) < 1\}$. Die Riemannsche Vermutung besagt nun, dass alle nichttrivialen Nullstellen s die Bedingung $Re(s) = 1/2$ erfüllen.

3 Sätze zur Primzahlverteilung

Wir haben in der EAZ gesehen, dass es Konstanten $0 < c < 1 < C$ gibt, mit: Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ ist

$$c\frac{n}{\log n} < \pi(n) < C\frac{n}{\log n}.$$

Dabei ist $\pi(n) = \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq n\}$ die Primzahlfunktion. Für $n \geq 4$ gilt sogar

$$(\log 2)\frac{n}{\log n} \leq \pi(n) \leq (\log 4 + 8\frac{\log\log n}{\log n})\frac{n}{\log n}$$

(siehe EAZ, 10.6) (wobei $\log 2 = 0,6931...$ und $\log 4 = 1,3862...$ ist). Es ist daher $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} \geq \log 2$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} \leq \log 4$.

Der Primzahlsatz (1896 unabhängig bewiesen von Hadamard und de La Vallée Poussin) besagt sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1.$$

Eine bessere Approximation als $n/\log(n)$ für $\pi(n)$ ist $\mathrm{li(n)} = \int_2^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{dt}}{\log \mathrm{t}}$.

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	li(x)
10	4	4,343	5,120
10^2	25	21,715	29,081
10^3	168	144,764	176,564
10^4	1229	1085,736	1245,09
10^5	9592	8684,9	9628,76
10^{10}	455.052.511	434.294.481,9	$4,55056 \cdot 10^8$.

Akzeptiert man die Approximation $\pi(x) \approx \mathrm{li(x)}$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Zahl n in der Umgebung von x prim ist

$$P(n \approx x \text{ prim}) \approx \frac{\#\{\mathrm{p} \in \mathbb{P} | \mathrm{x} - \mathrm{h} \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{x} + \mathrm{h}\}}{\#\{\mathrm{n} \in \mathbb{N} | \mathrm{x} - \mathrm{h} \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{x} + \mathrm{h}\}}$$

(h groß genug, um zufällige Schwankungen auszugleichen, aber $h << x$). Für diesen Quotienten gilt

$$\approx \frac{2h(\mathrm{li(x)})'}{2h} = \mathrm{li}(x)' = \frac{1}{\log x}.$$

Hierfür erhalten wir z.B. die folgenden Werte:

x	$1/\log x$
10	0,434
10^2	0,217
10^{10}	0,0434
10^{20}	0,0217

Ziel dieses Kapitels ist die Auswertung/Abschätzung von Ausdrücken wie $\sum_{p\leq x} 1/p$, oder $\Pi_{p\leq x}(1 - 1/p)$, etc. (p bezeichnet dabei immer eine Primzahl).

Definition 3.1. Seien f und g Funktionen auf einer nach oben beschränkten Teilmenge D von $\mathbb{R}$. Schreibe

(i) $f \sim g :\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ („asymptotische Äquivalenz").

(ii) $f = O(g) :\Leftrightarrow \exists C > 0 :$ für alle genügend große $x \in D$ ist $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

(iii) $f = o(g) :\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$.

Bei (ii) ist gegebenenfalls die Konstante C zu spezifizieren.

Satz 3.2. *(Satz von Mertens) Es gilt*

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + R_x$$

mit $R_x \in (-1 - \log 4, \log 4)$. *Insbesondere ist* $\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$.

Beweis. (i) Sei $n = [x]$. Es ist (vgl. Bsp. 1.11)

$$\log n! = n \log n - n + 1 + \theta_n \log n$$

mit $\theta_n \in [0,1]$.

(ii) Bezeichnen wir die Zahl der Faktoren p in $k \in \mathbb{Z}$ mit $v_p(k)$, so gilt:

$$\log n! = \sum_{p \le n} v_p(n!) \log p.$$

Dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. EAZ, 10.1):

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) < \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

Mit diesen Abschätzungen erhalten wir also

$$n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \le n} \log p < \log n! < n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Weiter ist wegen $\Pi_{p \le n} p < 4^n$ (vgl. EAZ, 10.4)

$$\sum_{p \le n} \log p < n \log 4.$$

Also erhalten wir

(iii)

$$n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} - n \log 4 < n \log n - n + 1 + \log n < n \log n,$$

d.h.

$$\sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} < \log n + \log 4 \le \log x + \log 4,$$

was zeigt, dass $R_x < \log 4$ ist.

(iv) Es ist

$$\sum_{p \le n} \frac{\log p}{p(p-1)} < \sum_{2 \le m \le n} \frac{\log m}{m(m-1)} \le \sum_{r \ge 1} \sum_{2^{r-1} < m \le 2^r} \frac{r \log 2}{m(m-1)}$$
$$= \sum_{r \ge 1} r \log 2 \sum_{2^{r-1} < m \le 2^r} \frac{1}{m(m-1)}.$$

Wegen $S_k := \sum_{m>k} 1/(m(m-1)) = 1/k$ (denn: Betrachte $S_k - S_{k+1} = 1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$, d.h. $S_k = 1/k + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$, muss dann schon $c = 0$ sein.) ist die letzte Doppelsumme gleich

$$\sum_{r\geq 1} \frac{r \log 2}{2^r} = \log 2 \sum_{r\geq 1} \frac{r}{2^r} = 2\log 2 = \log 4.$$

Hierbei ging bei der Berechnung von $\sum_{r\geq 1} r/2^r$ die Potenzreihenidentität $\sum_{r\geq 1} rx^r = x/(1-x)^2$ für $|x| < 1$ ein, wobei für $x = 1/2$ gerade der Wert 2 herauskommt.

(v) Deshalb gilt mit (ii) und (iii):

$$n \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} + n\log 4 > n\log n - n + 1,$$

d.h.

$$\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} > \log n + \frac{1}{n} - (1 + \log 4) > \log x - (1 + \log 4),$$

was zeigt, dass $R_x > -(1 + \log 4)$ ist und somit die Behauptung zeigt.

□

Der Satz von Mertens ist der Schlüssel für die Berechnung von $\sum_{p\leq x} 1/p$ und $\Pi_{p\leq x}(1 - 1/p)$.

Proposition/Definition 3.3. *Die Summe*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \left\{ \log(\frac{1}{1-p^{-1}}) - \frac{1}{p} \right\}$$

konvergiert absolut. Sei c_0 ihr Wert. (Es ist $c_0 = 0,315718...$).

Beweis. Es ist

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} | \left\{ \log(\frac{1}{1-p^{-1}}) - \frac{1}{p} \right\} | = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k\geq 2} \frac{1}{kp^k},$$

und wegen $1/(2kp^{2k}) + 1/((2k+1)p^{2k+1}) \leq 1/p^{2k}$ ist die Doppelsumme kleiner gleich

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^{2k}} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Satz 3.4. *Mit c_0 wie in Proposition/Definition 3.3 gilt:*

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\left(\frac{1}{\Pi_{p\le x}(1-1/p)}\right) - c_0 + \frac{\Theta}{2(x-1)},$$

wobei $\Theta = \Theta_x \in (0,1)$.

Beweis. Formen wir die Gleichung nach Θ um, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Theta &= 2(x-1)\left[\sum_{p\le x}\frac{1}{p} - \sum_{p\le x}\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) + c_0\right]\\ &= 2(x-1)\left[-\sum_{p\le x}\left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p}\right\} + c_0\right]\\ &= 2(x-1)\sum_{p>x}\left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p}\right\}\\ &= 2(x-1)\sum_{p>x}\sum_{k\ge 2}\frac{p^{-k}}{k}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{k\ge 2}\frac{t^k}{k} < \frac{1}{2}\sum_{k\ge 2}t^k = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-t} - (1+t)) = \frac{1}{2}\frac{t^2}{1-t} = \frac{1}{2t^{-1}(t^{-1}-1)}$$

für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < 1$ gilt für Θ mit $t = p^{-1}$:

$$\Theta < \sum_{p>x}\frac{2(x-1)}{2p(p-1)} < \sum_{n>x}\frac{x-1}{n(n-1)}.$$

Wegen $\sum_{m>k} 1/(m(m-1)) = 1/k$ (siehe Beweis von Satz 3.2) ist

$$\sum_{n>x}\frac{x-1}{n(n-1)} = \frac{x-1}{N-1},$$

mit $N = \lceil x \rceil$. Dies zeigt $0 < \Theta < 1$. □

Satz 3.5. *Es existiert eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass für $x \ge 2$ gilt:*

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Die Konstante C zum O-Symbol kann $\le 2(1+\log 4) < 5$ gewählt werden. Insbe-

sondere gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\le x} \frac{1}{p} - \log\log x = c_1.$$

(Die Konstante c_1 wird in Satz 3.7 näher bestimmt.)

Beweis. Für $t > 0$ sei $R(t) := \sum_{p\le t} \log(p)/p - \log(t)(= O(1)$ nach dem Satz von Mertens (3.2)). Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} \frac{1}{p} &= \int_{2-}^{x} \frac{1}{\log t} d\left(\sum_{p\le t} \frac{\log p}{p}\right)(t)\\ &= \int_{2-}^{x} \frac{1}{\log t} d\log(t) + \int_{2-}^{x} \frac{1}{\log t} dR(t)\\ &= \int_{2}^{x} \frac{1}{\log t}\frac{1}{t} dt + \int_{2-}^{x} \frac{1}{\log t} dR(t).\end{aligned}$$

Wegen $(\log\log t)' = 1/(t\log t)$ und $(1/\log t)' = -1/(t(\log t)^2)$ und partieller Integration des zweiten Summanden erhalten wir

$$\log\log x - \log\log 2 + \frac{R(x)}{\log x} - \frac{R(2-)}{\log 2} + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

Sei $R := \sup\limits_{t\ge 2-} |R(t)| (< 1 + \log 4$ nach Satz 3.2). Mit

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t(\log t)^2} = \left(\frac{-1}{\log t}\right)\Bigg|_x^\infty = \frac{1}{\log x}$$

erhalten wir mittels Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\left|\frac{R(x)}{\log x} - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt\right| \le \frac{2R}{\log x} < \frac{2(1+\log 4)}{\log x}. \qquad (*)$$

Zusammen haben wir also

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} - \log\log x = \frac{R(x)}{\log x} - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt + \left[\int_2^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt - \log\log 2 - \frac{R(2-)}{\log 2}\right].$$

Unter Beachtung, dass $R(2-)/\log 2 = -1$ ist, ergibt sich für den Term in eckigen Klammern, den wir als unser c_1 definieren,

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt - \log\log 2 + 1 =: c_1.$$

Mit $(*)$ ergibt sich

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\log\log x=c_1+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

wobei wir die Konstante zum O-Symbol $\leq 2(1+\log 4)<5$ wählen können. $\square$

Korollar 3.6. *Mit den Konstanten c_0 und c_1 aus (3.3) bzw. (3.5) gilt*

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})=\frac{e^{-(c_0+c_1)}}{\log x}(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)).$$

Beweis. Es ist

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})=e^{-\log(\Pi_{p\leq x}(1-1/p)^{-1})}.$$

Mit Satz 3.4 ist dies für ein $\Theta_x\in(0,1)$ identisch zu

$$e^{(-\sum_{p\leq x}1/p-c_0+\Theta_x/(2(x-1)))}.$$

Satz 3.5 liefert ein c_1 aus $\mathbb{R}$, sodass dieser Ausdruck gleich dem Folgenden ist:

$$e^{-\log\log x-c_1+O(1/\log x)-c_0+\Theta_x/(2(x-1))}=\frac{e^{-(c_0+c_1)}}{\log x}\cdot e^{O(1/\log x)}.$$

Da es eine Konstante $\widetilde{C}$ gibt, sodass $|e^h-1|\leq\widetilde{C}\cdot h$ für $h\in[0,1]$, gilt:

$$e^{O(1/\log x)}-1=O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Somit ist

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})=\frac{e^{-(c_0+c_1)}}{\log x}(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)).$$

$\square$

Satz 3.7. *(Formel von Mertens) Es gilt: $c_0+c_1=\gamma$, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist (siehe Satz 1.14). Das heißt*

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})=\frac{e^{-\gamma}}{\log x}(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)).$$

Beweis. (i) Es ist

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

für $Re(s) > 1$. Wir betrachten das Verhalten von $\zeta(s)$ für $s \to 1^+$. Genauer: Wir betrachten das Verhalten von $\zeta(1+s)$ für $0 < s \leq 1$ und $s \to 0$.

Es gelte folgende Notation: Für Funktionen f und g auf $(0,1]$ sei

$$f = O(g) :\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : |f(s)| \leq C \cdot |g(s)|;$$
$$f \sim g :\Leftrightarrow \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 1.$$

Sei

$$\begin{aligned} f(s) :&= \log\zeta(1+s) - \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1-s} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \left[\log(\frac{1}{1-p^{-1-s}}) - p^{-1-s}\right] \\ &= \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ k\geq 2}} \frac{p^{-k(1+s)}}{k} \leq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ k\geq 2}} \frac{p^{-k}}{k} = c_0 \quad \text{(vergleiche (3.3)).} \end{aligned}$$

Somit ist f absolut konvergent, stetig für $s \geq 0$ und $f(0) = c_0$.

(ii) Es ist $\zeta(1+s) = \sum_{n\geq 1} n^{-(1+s)}$. Dies ist für ein $\Theta \in [0,1]$ mit Proposition 1.10 gleich

$$\int_1^\infty x^{-1-s} dx + 1 + \Theta = -\frac{x^{-s}}{s}\Big|_{x=1}^{x=\infty} + 1 + O(1) = \frac{1}{s} + O(1).$$

(iii) Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \log\zeta(1+s) &= \log(1/s + O(1)) = \log(1/s(1+O(s))) \\ &= \log(1/s) + \log(1+O(s)) = \log(1/s) + O(s) \\ &= \log(\frac{1}{1-e^{-s}}) + O(s), \end{aligned}$$

wegen $e^s - 1 \sim s \sim 1 - e^{-s}$. Dies ist gleich

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-sn}}{n} + O(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t) + O(s),$$

wobei zwischen der Summe und dem Integral wirkliche Gleichheit besteht mit $H(t) := \sum_{1\le n\le t} 1/n$. Partielle Integration liefert

$$e^{-st}H(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty H(t)(\frac{d}{dt}e^{-st})dt = s\int_1^\infty H(t)e^{-st}dt + O(s).$$

(iv) Sei $P(u) := \sum_{p\le u} 1/p$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1-s} = \int_1^\infty u^{-s}dP(u) = u^{-s}P(u)\Big|_1^\infty - \int_1^\infty P(u)du^{-s} \\ = s\int_1^\infty P(u)u^{-1-s}du.\end{aligned}$$

Mit folgender Substitution

$$u = e^t,\ \frac{du}{dt} = e^t,\ u^{-1-s} = e^{-t}e^{-st}$$

erhalten wir

$$s\int_0^\infty e^{-st}P(e^t)dt.$$

(v) Satz 1.14 liefert

$$H(t) = \log t + \gamma + O(1/t),$$

für $t \to \infty$ und Satz 3.5 liefert

$$\sum_{p\le e^t} 1/p = \log\log e^t + c_1 + O(1/\log(e^t)) = \log t + c_1 + O(1/t).$$

Also ist für $t \ge 1$ und $t \to \infty$

$$H(t) - P(e^t) = \gamma - c_1 + O(1/t).$$

Da $g(t) := H(t) - P(e^t) - \gamma + c_1$ beschränkt ist auf $[0,1]$, existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|g(t)| \le C\frac{1}{t+1}.$$

Weiter ist mit (iii) und (iv)

$$\begin{aligned}
f(s) &= s\int_0^\infty H(t)e^{-st}dt + O(s) - s\int_0^\infty e^{-st}P(e^t)dt \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}(H(t) - P(e^t))dt + O(s) \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}(\gamma - c_1)dt + s\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt + O(s) \\
&= \gamma - c_1 + s\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt + O(s).
\end{aligned}$$

(vi) Für $0 < s \leq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t+1}dt &= \sum_{k\geq 1}\frac{e^{-sk}}{k+1} + \Theta\left.\frac{e^{-st}}{t+1}\right|_{t=0}^{t=\infty}, \quad \Theta \in [0,1] \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{e^{-sk}}{k+1} + O(1) \quad (s \to 0) \\
&= e^s\sum_{k\geq 1}\frac{e^{-sk}}{k} + O(1) = e^s\log\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right) + O(1).
\end{aligned}$$

Bei $s \to 0$ ist

$$\begin{aligned}
&1 - e^{-s} = O(s) \\
&e^s = O(1) \\
&O(\log s^{-1}) = O(\log s).
\end{aligned}$$

Nach (v) gilt nun:

$$f(s) = \gamma - c_1 + sO(\log s^{-1}).$$

(vii) Wegen $\lim_{s\to 0} s\log s^{-1} = 0$ nach de L'Hôpital ist also

$$c_0 = \lim_{s\to 0} f(s) = \gamma - c_1.$$

□

Bemerkung 3.8. Es ist also $c_1 = \gamma + c_0 = 0,26149...$ und nach Satz 3.5 gilt

$$\sum_{p\leq x} 1/p = \log\log x + c_1 + \Theta\frac{2(1+\log 4)}{\log x}$$

für $|\Theta| \leq 1$. Die Primzahlen p sind „bekannt“ für $x = 10^{22}$, für das gilt

$$\sum_{p \leq 10^{22}} 1/p = 3,92507... + 0,26149... + \Theta \frac{2(1+\log 4)}{22 \log 10} < 4,3.$$

4 Arithmetische Funktionen und Dirichlet-Reihen

Definition 4.1. Eine arithmetische Funktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Sei $\mathfrak{A}$=$\{$arithmetische Funktionen$\}$ die Menge aller arithmetischen Funktionen. Ein $f \in \mathfrak{A}$ heißt

- additiv, falls gilt: $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$, falls $(m, n) = 1$.
- stark additiv, falls gilt: $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)\ \forall m, n \in \mathbb{N}$.
- multiplikativ, falls $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, $(m, n) = 1$ und zusätzlich $f(1) = 1$.
- stark multiplikativ, falls $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)\ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.2. (i) Die Eulersche Funktion φ ist multiplikativ.

(ii) Die Abbildung $\Omega : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit

$$\Omega(n) := \text{Zahl der Primfaktoren von } n \text{ mit Vielfachheiten gezählt}$$

ist stark additiv. Wohingegen die Abbildung $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit

$$\omega(n) := \text{Zahl der Primfaktoren ohne Multiplizitäten}$$

additiv ist, aber nicht stark additiv.

(iii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$; σ_k ist multiplikativ. Insbesondere ist die Teilerfunktion gegeben durch $\tau(n) = \sigma_0(n) = \#\{d|n\}$.

(iv) Die Möbius-Funktion μ ist

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^s, \ s = \#\{p|n\}, \ n \text{ quadratfrei} \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$$

ist multiplikativ.

Proposition 4.3. *Die Möbius-Funktion erfüllt*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \ n = 1 \\ 0, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Übungsaufgabe (Induktion nach s). □

Satz 4.4. *(Möbius-Inversion, I) Seien $f, g \in \mathfrak{A}$ gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Dito. □

Satz 4.5. *(Möbius-Inversion, II) Seien F und G Funktionen auf $[1, \infty)$. Es sind äquivalent:*

(i) $G(x) = \sum_{n \leq x} F(x/n)$.

(ii) $F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) G(x/n)$.

Beweis. Aufgrund der Autodualität reicht es, eine Richtung zu zeigen. Zeige (i)⇒(ii): Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) G(x/n) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n} F(\frac{x}{mn}) \\ &= \sum_{k \leq x} \sum_{\substack{m,n \\ m \cdot n = k}} \mu(n) F(\frac{x}{k}) = F(x), \end{aligned}$$

wegen

$$\sum_{\substack{m,n \\ m \cdot n = k}} \mu(n) = \begin{cases} 1, \ k = 1 \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$$

nach Proposition 4.3. □

Bemerkung 4.6. (i) Die Zuordnung $f \rightsquigarrow g$ in 4.4 ist analog zur Fourier-Transformation. Die Gleichung $f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)g(d)$ ist analog zur Fourier-Inversion.

(ii) Satz 4.4 gilt für Abbildungen von $\mathbb{N}$ in beliebige abelsche Gruppen $(A, +)$ statt $\mathbb{C}$.

Beispiel 4.7. Seien

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}(X)^*,\ n \mapsto f_n(X) = \prod_{\substack{\epsilon \text{ primitive n−te} \\ \text{Einheitswurzel}}} (X - \epsilon)$$

und

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}(X)^*,\ n \mapsto g_n(X) = X^n - 1 = \prod_{\substack{\epsilon\in\mathbb{C} \\ \epsilon^n=1}} (X - \epsilon).$$

Dann ist $g_n(X) = \prod_{d|n} f_d(X)$, also $f_n(X) = \prod_{d|n} g_d(X)^{\mu(n/d)}$. Für $n = 20$ gilt:

$$f_{20} = \frac{(X^{20} - 1)(X^2 - 1)}{(X^{10} - 1)(X^4 - 1)} = \frac{X^{10} + 1}{X^2 + 1} = X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1.$$

Definition/Proposition 4.8. Eine formale Dirichlet-Reihe ist eine Reihe der Form $\sum_{n\geq1} a_n n^{-s}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$. Die formale Dirichlet-Reihe von $f \in \mathfrak{A}$ ist die Reihe $D(f, s) := \sum_{n\geq1} f(n)n^{-s}$. Mit zwei Dirichlet-Reihen $D(f, s) = \sum_{n\geq1} a_n n^{-s}$ und $D(g, s) = \sum_{n\geq1} b_n n^{-s}$ sind auch

$$D(f, s) + D(g, s) := D(f + g, s) \text{ und}$$
$$D(f, s) \cdot D(g, s) := D(h, s)$$

formale Dirichlet-Reihen, wobei $h(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. Wir setzen $\mathfrak{D}$ ={formale Dirichlet-Reihen}. $\mathfrak{D}$ ist bzgl. „+“ und „·“ ein nullteilerfreier kommutativer Ring. Das 1-Element ist $\sum_{n\geq1} \delta_{1,n} n^{-s}$.

Beweis. Klar. □

Proposition/Definition 4.9. *Die Abbildung* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{D},\ f \mapsto D(f, s)$ *ist bijektiv. Die dadurch auf* $\mathfrak{A}$ *induzierte Multiplikation* $f * g := h$ *mit* $(f * g)(n) = h(n) =$

$\sum_{d|n} f(d)g(n/d)$ *macht* $\mathfrak{A}$ *zu einem Integritätsring.* $f * g$ *heißt die Faltung von* f *und* g*. Das Neutralelement bezüglich „ $*$ “ ist* $\delta = \delta_{1,n}$*:* $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Satz 4.10. *Sei* $f \in \mathfrak{A}$*. Es gilt:*

(i) f *ist Einheit in* $\mathfrak{A} \Leftrightarrow f(1) \neq 0$.

(ii) f *ist multiplikativ* $\Leftrightarrow D(f,s)$ *besitzt eine formale Produktentwicklung („Euler-Produkt“)* $D(f,s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 + \sum_{e\geq 1} f(p^e)p^{-es})$.

(iii) Die Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ *der multiplikativen arithmetischen Funktionen ist eine Untergruppe von* $\mathfrak{A}^*$.

Beweis. (i) Für f und g aus $\mathfrak{A}$ ist $f * g = \delta$ äquivalent zu

$$\sum_{d|n} f(n/d)g(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f(1) \neq 0$, so kann man dieses System rekursiv nach g auflösen:

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1)^{-1} \\ g(n) &= -f(1)^{-1} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)g(d), \ n > 1. \end{aligned}$$

Ist $f(1) = 0$, so gibt es keine Lösung.

(ii) Es ist klar, dass das Produkt rechts eine wohldefinierte Dirichlet-Reihe ist, wobei der Koeffizient $f(n)$ von n^{-s} gegeben ist durch $\Pi f(p_i^{e_i})$, falls $n = \Pi p_i^{e_i}$. Dies zeigt, dass die arithmetische Funktion f mit einer solchen Produktentwicklung multiplikativ ist. Ist umgekehrt f multiplikativ, d.h. $f(n) = \Pi f(p_i^{e_i})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so stimmt $D(f,s)$ mit der Produktentwicklung überein.

(iii) Es ist klar, dass $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}^*$, da für alle $f \in \mathfrak{M}$ gilt: $f(1) = 1$. Dass $\mathfrak{M}$ eine Untergruppe ist, folgt durch nachrechnen.

□

Beispiel 4.11. Seien $\underline{1}$, $\underline{j}$ und $\underline{j}^k$ arithmetische Funktionen mit

$$\underline{1}(n) = 1$$
$$\underline{j}(n) = n$$
$$\underline{j}^k(n) = n^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\underline{1} * \underline{1} = \tau,$$
$$\underline{1} * \underline{j} = \sigma = \sigma_1,$$
$$\underline{1} * \underline{j}^k = \sigma_k,$$
$$\underline{1} * \mu = \delta.$$

Mit der letzten Gleichheit folgt, dass $\underline{1}$ und μ Inverse bezüglich „ $*$ “ sind.

Allgemein gilt: $(f*\mu)(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d)$, wobei $f*\mu$ die Möbius-Transformation von f ist. Wegen $\underline{1} * \mu = \underline{j}$ folgt z.B.

$$\sigma = \underline{1} * \underline{j} = \underline{1} * \underline{1} * \varphi = \tau * \varphi,$$

d.h. $\sigma(n) = \sum_{d|n} \tau(d)\varphi(n/d)$.

Satz/Definition 4.12. *Seien*

$$\lambda := \mu * \log \in \mathfrak{A} \text{ (\textit{die von Mangoldt-Funktion})},$$
$$\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \psi(x) := \sum_{n \leq x} \lambda(n) \text{ (\textit{1. Tschebychew-Funktion})},$$
$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p \text{ (\textit{2. Tschebychew-Funktion})}.$$

Dann gelten:

(i)

$$\lambda(n) = \begin{cases} \log p, \ n = p^e \text{ \textit{Potenz von} } p \in \mathbb{P}, \ e \geq 1 \\ 0, \ \textit{sonst}. \end{cases}$$

(ii) $\psi(x) = \sum_{p^e \leq x} \log p = \log \mathrm{kgV}\{\mathrm{n} \leq \mathrm{x}\}$.

(iii) $\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \vartheta(x^{1/n})$ *(endliche Summe).*

(iv) $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2} \log x)$.

(v) $\vartheta(x) \leq (\log 4)[x]$.

(vi) $\psi(x) \geq (\log 2)[x]$.

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log(n/d) \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) \log(n) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \\
&= \delta(n) \log(n) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \\
&= -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d),
\end{aligned}$$

d.h. $\lambda = -(\mu \cdot \log) * \underline{1}$. Sind m, n teilerfremd, so ist

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} \mu(d_1 d_2) \log(d_1 d_2) \\
&= -\sum_{d_1|m} \mu(d_1) \sum_{d_2|n} \mu(d_2)(\log d_1 + \log d_2) \\
&= \sum_{d_1|m} \mu(d_1)(-\delta(n) \log d_1 + \lambda(n)) \\
&= \delta(n)\lambda(m) + \delta(m)\lambda(n).
\end{aligned}$$

D.h. $\lambda(n) = 0$, falls n keine Primzahlpotenz ist. Ist hingegen $n = p^e$, so ist

$$\begin{aligned}
\lambda(p^e) &= -(\mu(1) \log p^0 + \mu(p) \log p + \cdots + \mu(p^e) \log p^e) \\
&= -(0 + (-1) \log p + 0) = \log p,
\end{aligned}$$

da $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \ n = 1 \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$ und bereits $\mu(1) + \mu(p) = 0$ ist.

(ii) Folgt unmittelbar aus (i).

(iii) Für $p \in \mathbb{P}$ gilt

$$p^n \leq x \Leftrightarrow p \leq x^{1/n},$$

also tritt der Summand „$\log p$“ links und rechts bei der zu zeigenden Gleichung gleich oft auf.

(iv) Da $\sum_{n\geq 1} \vartheta(x^{1/n})$ eine endliche Summe mit höchstens $\log x/\log 2$ vielen Termen ist (da $x^{1/n} \geq 2 \Leftrightarrow n \leq \log x/\log 2$), gilt:

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \sum_{2\leq n\leq \log x/\log 2} \vartheta(x^{1/n}) \leq \vartheta(x) + \frac{\log x}{\log 2}\vartheta(x^{1/2}).$$

Aus $\vartheta(x^{1/2}) = O(x^{1/2})$ und $(\log x/\log 2)O(x^{1/2}) = O(x^{1/2}\log x)$ folgt die Behauptung. Insbesondere besagt diese, dass ψ und ϑ dasselbe asymptotische Verhalten haben.

(v) Es ist $\Pi_{p\leq n} p < 4^n$ (EAZ 10.4). Daraus folgt

$$\sum_{p\leq n} \log p < n\log 4.$$

(vi) Für $n \geq 7$ ist $\mathrm{kgV}\{1, 2, \ldots, n\} > 2^n$ (EAZ 10.5).

□

Satz 4.13. *(„Vermutung von Bertrand“) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $p \in \mathbb{P}$ mit $n < p \leq 2n$.*

Vorbemerkung. Wir könnten versuchen, mittels der Abschätzung

$$\log 2\frac{n}{\log n} < \pi(n) < (\log 4 + 8\frac{\log\log n}{\log n})\frac{n}{\log n} \qquad (*)$$

(gültig für $n \geq 4$, EAZ 10.6) obere und untere Abschätzungen für $\pi(n)$ und damit für $\pi(2n)$ zu bekommen. Wir müssten also $\pi(2n) > \pi(n)$ erreichen, was aber mit $(*)$ nicht möglich ist.

Beweis. (von 4.13) Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und kein $p \in \mathbb{P}$, sodass $n < p \leq 2n$ gilt. Wir zeigen, dass dann n „klein“ ist und erledigen diese kleinen n von Hand.

(i) Sei $N := \binom{2n}{n}$ und p ein Primfaktor von N, d.h.

$$0 < v_p(N) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{i\geq 1}([2n/p^i] - 2[n/p^i])$$

(da $v_p(n!) = [n/p] + [n/p^2] + \dots$).

(ii) Nach Voraussetzung ist $p \le n$ (da jeder Primfaktor von $N = \binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ kleiner gleich $2n$ ist).

(iii) Es gilt sogar, dass $p \le (2/3)n$ ist. Ansonsten hätten wir $(2/3)n < p \le n$, also $2p \le 2n < 3p$ und damit $9p^2 > 4n^2$. Also insgesamt $p^2 > (4/9)n^2 > 2n$. Wir hätten $v_p(N) = [2n/p] - 2[n/p] = 2 - 2 = 0$, was ein Widerspruch zu $v_p(N) > 0$ aus (i) ist.

(iv) Also ist jeder Primfaktor p von $N = \binom{2n}{n} \le (2/3)n$ und deshalb gilt

$$\begin{aligned}\sum_{p|N} \log p \le \sum_{p \le (2/3)n} \log p &= \vartheta((2/3)n) = \vartheta([(2/3)n]) \\ &\le \log 4[(2/3)n] \le (2/3)n \cdot 2\log 2 = (4/3)n \log 2.\end{aligned}$$

(v) Wegen $[(2n)/p^i] - 2[n/p^i] \le 1$ und $p^i \le 2n \Leftrightarrow i \le \log(2n)/\log(p)$ folgt mit Teil (i): $v_p(N) \le [\log(2n)/\log(p)]$. Ist $v_p(N) \ge 2$, so ist $2\log p \le v_p(N)\log p \le \log(2n)$, d.h. $p \le \sqrt{2n}$ und es gibt höchstens $\sqrt{2n}$ solcher p. Also gilt

$$\sum_{\substack{v_p(N) \ge 2 \\ p|N}} v_p(N) \log p \le \sqrt{2n}\log(2n).$$

(vi) Es ist

$$\log N = \sum_{p|N} v_p(N) \log p = \sum_{\substack{p|N \\ v_p(N)=1}} \log p + \sum_{\substack{p|N \\ v_p(N) \ge 2}} v_p(N) \log p,$$

und mit (iv) und (v) ist dies kleiner gleich

$$(4/3)n \log 2 + \sqrt{2n}\log(2n).$$

(vii) $N = \binom{2n}{n}$ ist der größte Term von $2^{2n} = (1+1)^{2n} = 1 + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + 1 = 2 + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{2n-1}$ (also in dieser Darstellung insgesamt $2n$ Summanden). Es gilt also $2^{2n} \le 2n\binom{2n}{n} = 2nN$. Somit folgt

$$2n \log 2 \le \log(2n) + \log N$$

und mit (vi) ist dies kleiner gleich

$$\log(2n) + (4/3)n\log 2 + \sqrt{2n}\log(2n).$$

Insgesamt erhalten wir

$$2n\log 2 \leq 3(1+\sqrt{2n})\log(2n), \qquad (*)$$

wobei die linke Seite linear in n wächst, aber die rechte Seite nur sublinear in n. D.h. dies ist ausgeschlossen für große n.

(viii) Durch nachrechnen findet man, dass $(*)$ nicht erfüllt ist für $n > 2^9 = 512$. Also sei nun $n \leq 512$.

(ix) Betrachte die Primzahlen

q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
2	3	5	7	13	23	43	83	163	317	631

Dann gilt aber für alle $i \in \{1,\ldots,11\}$, dass $q_{i+1} < 2q_i$ ist. Also gibt es für jedes $n \leq 630$ ein q_i aus dieser Liste mit $n < q_i < 2n$.

□

Schlussbemerkung. Verfeinerte Abschätzungen für die Funktionen λ, ψ und ϑ liefern bessere Abschätzungen für $\pi(x)$. Eine der besten dieses Typs ist

$$(1+\frac{1}{2\log x})\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1+\frac{3}{2\log x})\frac{x}{\log x},$$

die für $x \geq 52$ richtig ist. In diesem Bereich ist also immer $\pi(x) > x/(\log x)$.

Die Daseinsberechtigung für ϑ und ψ ist wie folgt:

Es gilt

$$1 \leq C := \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$
$$1 \geq c := \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

was leicht zu zeigen ist. Dass C und c zu 1 zusammenfallen, ist gerade der Primzahlsatz $\pi(x) \sim x/\log x$. Insbesondere ist also als Konsequenz des Primzahlsatzes $\vartheta(x) \sim \psi(x) \sim x$.

5 Mittlere Ordnungen arithmetischer Funktionen

Definition 5.1. Seien f und g arithmetische Funktionen. Wir sagen: f hat mittlere Ordnung g, falls gilt:

$$\sum_{n\leq x} f(n) \sim \sum_{n\leq x} g(n).$$

Bemerkung.

(i) Man wird zu gegebenem f ein „elementares“ g suchen, sodass f mittlere Ordnung g hat.

(ii) Zu f gibt es viele mittlere Ordnungen g_1, g_2, ...

(iii) Hat f mittlere Ordnung g und ist die Approximation $\sum_{n\leq x} f(n) \sim \sum_{n\leq x} g(n)$ genügend gut und g glatt, so beschreibt g den Mittelwert

$$\frac{1}{2y+1} \sum_{x-y\leq n\leq x+y} f(n) \approx g(x)$$

von f um x, falls $0 << y << x$.

Beispiel.

$$f(n) = \begin{cases} 1, \ n \in \mathbb{P} \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$$

hat $1/\log x$ als mittlere Ordnung und somit

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \pi(x) \sim \sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{\log n} \sim \mathrm{li(x)} \sim \frac{\mathrm{x}}{\log \mathrm{x}}.$$

Beispiel 5.2. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\tau(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}1 = \sum_{d\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(d)}}1 = \sum_{d\leq x}\left[\frac{x}{d}\right]\\ &= \sum_{d\leq x}(\frac{x}{d}+O(1)) = x\sum_{d\leq x}(\frac{1}{d}+O(x))\\ &= x(\log x+O(1))+O(x) = x\log x+O(x).\end{aligned}$$

Deshalb hat $\tau(n)$ die (eine) mittlere Ordnung $\frac{d}{dx}(x\log x)=\log x+1$.

Beispiel: Das lokale Mittel von $\tau(n)$ für $90\leq n\leq 110$ ist $123/21 = 5,857...$ (vgl.: $\log(100)+1 = 5,605...$).

Proposition 5.3. *Seien f und g arithmetische Funktionen mit Summenfunktionen F und G, d.h. $F(x)=\sum_{n\leq x}f(n)$ und $G(x)=\sum_{n\leq x}g(n)$. Für $1\leq y\leq x$ gilt*

$$\sum_{n\leq x}(f*g)(n) = \sum_{n\leq y}g(n)F(\frac{x}{n}) + \sum_{m\leq x/y}f(m)G(\frac{x}{m}) - F(\frac{x}{y})G(y).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(f*g)(n) &= \sum_{\substack{m,d\\ md\leq x}}f(m)g(d) = \sum_{\substack{md\leq x\\ d\leq y}}f(m)g(d) + \sum_{\substack{md\leq x\\ d>y}}f(m)g(d)\\ &= \sum_{d\leq y}g(d)F(\frac{x}{d}) + \sum_{m\leq x/y}f(m)(G(\frac{x}{m})-G(y))\\ &= \sum_{d\leq y}g(d)F(\frac{x}{d}) + \sum_{m\leq x/y}f(m)G(\frac{x}{m}) - F(\frac{x}{y})G(y).\end{aligned}$$

□

Satz 5.4. *Es gilt sogar:*

$$\sum_{n\leq x}\tau(n) = x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).$$

Beweis. Wende Proposition 5.3 mit $f=g=\underline{1}$ an, also ist $\underline{1}*\underline{1}=\tau$ und $F(x)=$

$G(x) = [x]$. Definiere $y := \sqrt{x}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\tau(n) &= 2\sum_{n\le x^{1/2}}[\frac{x}{n}] - [x^{1/2}]^2\\ &= 2x\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{1}{n} + O(\sqrt{x}) - (x + O(\sqrt{x}))\\ &= 2x(1/2\log x + \gamma + O(x^{-1/2})) - x + O(\sqrt{x})\\ &= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

□

Folgerung: $\log x + 1 + (2\gamma - 1) = \log x + 2\gamma$ ist mittlere Ordnung von τ. Der Mittelwert von τ für $90 \le n \le 110$ ist $5,857...$ und $\log 100 + 2\gamma = 5,759....$

Satz 5.5. *Für $x \to \infty$ ist $\sum_{n\le x}\sigma(n) = \pi^2/12x^2 + O(x\log x)$. D.h. $\sigma(n)$ hat $\pi^2 n/6$ als mittlere Ordnung.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\sigma(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{d|n} d = \sum_{\substack{m,d\\ n=md\le x}} d = \sum_{m\le x}\sum_{d\le x/m} d = 1/2\sum_{m\le x}[\frac{x}{m}]([\frac{x}{m}] + 1)\\ &= 1/2\sum_{m\le x}(\frac{x}{m} - \{\frac{x}{m}\})(\frac{x}{m} - \{\frac{x}{m}\} + 1)\\ &= 1/2\sum_{m\le x}(\frac{x}{m})^2 + O(x\sum_{m\le x}\frac{1}{m})\\ &= 1/2x^2(\zeta(2) - \sum_{m>x}\frac{1}{m^2}) + O(x\log x),\end{aligned}$$

wobei $\sum_{m>x} 1/m^2 = O(x^{-1})$ ist. Dies lässt sich einsehen, indem man die Summe mit dem Integral abschätzt. Also erhalten wir insgesamt

$$1/2x^2\zeta(2) + O(x) + O(x\log x),$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 5.6. Sind f und g arithmetische Funktionen mit mittleren Ordnungen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\gamma}$, so gilt im Allgemeinen NICHT, dass $\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\gamma}$ mittlere Ordnung von $f\cdot g$ ist. Deshalb können wir nicht schließen, dass $\frac{\sigma(n)}{n}$ die mittlere Ordnung

$\pi^2/6 \cdot n \cdot 1/n = \pi^2/6$ hat. Die Aussage gilt aber trotzdem, denn:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\sigma(n)}{n} &= \sum_{\substack{m,d\\ md\leq x}}\frac{d}{md} = \sum_{m\leq x}\frac{1}{m}[\frac{x}{m}]\\ &= x\sum_{m\leq x}\frac{1}{m^2} + O(\log x) = \frac{\pi^2}{6} + O(\log x).\end{aligned}$$

Definition 5.7. Die arithmetische Funktion f ist mittelbar mit Mittel $c \in \mathbb{C}$, falls sie konstante mittlere Ordnung c hat, d.h. $\sum_{n\leq x} f(n) \sim cx$, bzw. $\lim_{x\to\infty} 1/x \sum_{n\leq x} f(n) = c$. In diesem Sinne hat $\frac{\sigma(n)}{n}$ das Mittel $\pi^2/6$.

Satz 5.8. *Für $x \to \infty$ gilt*

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x)$$

(d.h. $\varphi(n)$ hat mittlere Ordnung $\zeta(2)^{-1}x$).

Beweis. Wegen $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ (da $\underline{1} * \varphi = \underline{j}$), folgt mit der Möbius-Inversion, dass $\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu(n/d)d$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\varphi(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{\substack{m,d\\ md=n}}\mu(d)m = \sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{m\leq[x/d]} m\\ &= 1/2\sum_{d\leq x}\mu(d)[\frac{x}{d}]([\frac{x}{d}]+1)\\ &= 1/2x^2\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d})\\ &= 1/2x^2\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x\log x),\end{aligned}$$

analog wie im Beweis von Satz 5.5.

Es ist $\mu * \underline{1} = \delta$, also ist $1 = D(\mu, s) \cdot D(\underline{1}, s)$ in $\mathfrak{D}$. Deshalb gilt für $s = 2$, welches im Konvergenzbereich der beiden Dirichlet-Reihen ist:

$$1 = D(\mu, 2) \cdot D(\underline{1}, 2) = (\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^2})\zeta(2),$$

also

$$\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

und

$$\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}=\zeta(2)^{-1}-\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Letztere Summe lässt sich mit Hilfe des Integrals abschätzen und es gilt $\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}=O(x^{-1})$. Deshalb erhalten wir

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=1/2x^2\zeta(2)^{-1}+O(x\log x).$$

□

Korollar 5.9. *(zum Beweis von 5.8)* $\frac{\varphi(n)}{n}$ *ist mittelbar mit Mittel* $\zeta(2)^{-1}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n}&=\sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{m\leq x/d}\frac{m}{md}=\sum_{d\leq x}\mu(d)[\frac{x}{d}]\frac{1}{d}\\&=x\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\log x)=\zeta(2)^{-1}x+O(\log x).\end{aligned}$$

□

Korollar 5.10. *(vgl. Problem 2.3 (a)) Es gilt*

$$P((m,n)=1)=\zeta(2)^{-1}.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}P((m,n)=1)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\#\{(m,n)\in\mathbb{N}^2|(m,n)=1;\ m,n\leq x\}}{\#\{(m,n)|m,n\leq x\}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sum_{n\leq x}\varphi(n)}{[x]^2}.\end{aligned}$$

Mit Satz 5.8 ist dies gleich

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x))}{[x]^2}=\frac{6}{\pi^2}.$$

□

Satz 5.11. *(vgl. Problem 2.3 (b)) Es ist*

$$P(n\ \textit{quadratfrei})=\zeta(2)^{-1}.$$

Beweis. (i) Es ist

$$P(n \text{ quadratfrei}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{n \le x | n \text{ quadratfrei}\}}{[x]}.$$

(ii) Da n quadratfrei ist genau dann, wenn $\mu(n)^2 = 1$, berechnen wir nun $\sum_{n\le x} \mu(n)^2$.

(iii) Wir schreiben $n \in \mathbb{N}$ eindeutig als $n = q \cdot m^2$, wobei q quadratfrei ist mit $q := \prod_{\substack{p|n \\ v_p(n)\equiv 1(2)}} p$. Dann ist $\mu(n)^2 = \delta(m) = \sum_{d|m} \mu(d)$ (da $\underline{1} * \mu = \delta$) und für $d \in \mathbb{N}$ gilt: $d|m \Leftrightarrow d^2|n$.

(iv) Deshalb ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \mu(n)^2 &= \sum_{n\le x} \sum_{\substack{d \\ d^2|n}} \mu(d) = \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d)[\frac{x}{d^2}] = x \sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d)\{\frac{x}{d^2}\} \\ &= x(\zeta(2)^{-1} + O(x^{-1/2})) + O(\sqrt{x}) = \zeta(2)^{-1}x + O(x^{1/2}).\end{aligned}$$

Also ist $P(n \text{ quadratfrei}) = \zeta(2)^{-1}$.

□

Bemerkung: Satz 5.11 besagt, dass μ^2 den Mittelwert $\zeta(2)^{-1} = 0,609...$ hat. Vergleiche dies mit folgenden Werten:

x	10	100
$\#(n \le x \| n \text{ quadratfrei})$	7	61

Was ist der Erwartungswert für $\omega(n)$ und $\Omega(n)$?

Satz 5.12. *Es ist*

$$\sum_{n\le x} \omega(n) = x \log\log x + c_1 x + O(\frac{x}{\log x}),$$

wobei es sich bei c_1 um die Mertens-Konstante handelt (vgl. (3.3), (3.5) und (3.7)), also $c_1 = \gamma - c_0 = 0,26149...$.

Beweis. Es ist

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{n\le x}\sum_{p|n}1 = \sum_{p\le x}[\frac{x}{p}]$$
$$= x(\sum_{p\le x}\frac{1}{p}) + \pi(x)O(1).$$

Dies ist mit Satz 3.5 gleich

$$x(\log\log x + c_1 + O(\frac{1}{\log x})) + O(\frac{x}{\log x}) = x\log\log x + c_1 x + O(\frac{x}{\log x}).$$

□

Satz 5.13. *Es gilt, dass*

$$\sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + c_2 x + O(\frac{x}{\log x}),$$

mit $c_2 = c_1 + \sum_p \frac{1}{p(p-1)} = 1,03465...$.

Beweis. (i) Sei

$$A(x) = \sum_{n\le x}(\Omega(n) - \omega(n)) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\ge 2}[\frac{x}{p^k}].$$

(ii) Es gilt, dass

$$A(x) \le x\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\ge 2}p^{-k} = x\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{p^{-2}}{1-p^{-1}} = x\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p(p-1)}.$$

(iii) Wegen

$$\sum_{2\le k\le[\log x/\log p]=:n}\frac{1}{p^k} = \frac{1-p^{1-n}}{p(p-1)}$$

und

$$\frac{p^{-n}}{p-1} = \frac{e^{-\log p[\log x/\log p]}}{p-1} \le \frac{p}{p-1}e^{-\log x} = \frac{p}{p-1}x^{-1} = O(x^{-1}),$$

ist

$$
\begin{aligned}
A(x) &\geq \sum_{p\leq\sqrt{x}} \sum_{2\leq k\leq \log x/\log p} (\frac{x}{p^k} - 1) \\
&= x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{1}{p(p-1)} - x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{p^{-n}}{p-1} - \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\log x}{\log p} - 1 \\
&= x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{1}{p(p-1)} + O(x^{1/2}) + \pi(x^{1/2})O(\log x) \\
&= x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{1}{p(p-1)} + O(x^{1/2}) + O(\frac{x^{1/2}}{\log x^{1/2}} \log x) \\
&= x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{1}{p(p-1)} + O(x^{1/2}).
\end{aligned}
$$

(iv) Es ist

$$A(x) \geq x \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} + O(\sqrt{x}),$$

da

$$\sum_{p>\sqrt{x}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n>\sqrt{x}} \frac{1}{n(n-1)} \leq \sum_{n>\sqrt{x}-1} \frac{1}{n^2} = O(x^{-1/2}).$$

(v) Also ist

$$A(x) = x \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} + O(\sqrt{x})$$

und

$$\sum_{n\leq x} \Omega(n) = \sum_{n\leq x} \omega(n) + A(x) = x \log\log x + c_2 x + O(\frac{x}{\log x}).$$

□

Damit erhalten wir für $\omega(n)$ bzw. $\Omega(n)$ in der Nähe von x den Erwartungswert $g(x) = \frac{d}{dx}(x \log\log x + (c_1 \text{ bzw. } c_2) \cdot x) = \log\log x + 1/\log x + (c_1 \text{ bzw. } c_2)$. Z.B. für $x = 10^{100}$: 5,7050... bzw. 6,4781...

Tabelle 5.14. (zur Güte der Approximation)

x	100	1000	10000
$\sum_{n\le x}\omega(n)=\sum_{p\le x}[x/p]$	171	2126	24300
$x\log\log x + c_1 x$	178,867	2194,14	24818,2
$\sum_{n\le x}\Omega(n)=\sum_{p^k\le x}[x/p^k]$	239	2877	31985
$x\log\log x + c_2 x$	256,183	2967,29	32549,8
Erwartungswert von $\omega(n)$	2,005	2,339	2,590
lokales Mittel von $\omega(n)$	1,952 $90\le n\le 110$	2,262 $970\le n\le 1030$	2,537 $9900\le n\le 10100$
Erwartungswert von $\Omega(n)$	2,779	3,112	3,363
lokales Mittel von $\Omega(n)$	2,667 $90\le n\le 110$	3,131 $970\le n\le 1030$	3,318 $9900\le n\le 10100$

Satz 5.15. *Seien $f:\mathbb{N}\to[0,1]$ multiplikativ und*

$$M := M(f) = \prod_{p\in\mathbb{P}}((1-p^{-1})\sum_{i\ge 0}\frac{f(p^i)}{p^i}).$$

(Konvergiert das Produkt nicht, so wird $M=0$ gesetzt.) Dann ist f mittelbar mit Mittel $M(f)$, d.h.

$$\sum_{n\le x} f(n) = x(M+o(1)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = M(f).$$

Beispiel 5.16. (i) Die Funktion $f(n)=\frac{\varphi(n)}{n}$ ist multiplikativ mit Werten in $[0,1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} M(f) &= \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-1})(1+\sum_{i\ge 1}\frac{(p-1)p^{i-1}}{p^{2i}}) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-1})(1+p^{-1}) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-\frac{1}{p^2}) = \zeta(2)^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) Sei $f=\mu^2$, dann ist

$$M = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-1})(1+\sum_{i\ge 1}\frac{\mu^2(p^i)}{p^i}) = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-1})(1+\frac{1}{p}) = \zeta(2)^{-1}.$$

(iii) Sei

$$f(n) = \begin{cases} 1, \ n \text{ frei von k-ten Potenzen}, \ k = 2, 3, 4, ... \\ 0, \ \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Funktion f hat dann Werte in $[0,1]$ und ist multiplikativ, also ist

$$M = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-1})(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-1}) \frac{(1 - p^{-k})}{1 - p^{-1}} = \zeta(k)^{-1}.$$

Für den Beweis von Satz 5.15 benötigen wir etwas Vorarbeit.

Definition/Lemma 5.17. *Für $y > 2$ seien α_y, β_y die stark multiplikativen Funktionen mit*

$$\alpha_y(p) = \begin{cases} 1, \ p \leq y \\ 0, \ p > y \end{cases},$$

und

$$\beta_y(p) = \begin{cases} 0, \ p \leq y \\ 1, \ p > y \end{cases},$$

mit $p \in \mathbb{P}$. Dann gelten:

(i) Für jede multiplikative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist

$$f = (f\alpha_y) * (f\beta_y).$$

(ii) Hat f zusätzlich Werte in $[0,1]$, so ist

$$f \leq (f\alpha_y) * \beta_y =: f_y.$$

(iii) Die Funktion $h_y := \beta_y * \mu$ ist multiplikativ mit Werten

$$h_y(p^i) = \begin{cases} -1, \ p \leq y, \ i = 1 \\ 0, \ p > y \text{ oder } i \geq 2 \end{cases},$$

mit $p \in \mathbb{P}$. Es gilt: $1 * h_y = 1 * \beta_y * \mu = \beta_y$. Insbesondere ist $h_y(n) = 0$, falls $n > \Pi_{p \leq y} p =: N(y)$.

Erinnerungen.

- $f * \underline{1}$ ist die Möbiustransformierte von f.
- $f * \mu$ ist die inverse Möbiustransformierte von f.
- Faltungen von multiplikativen Funktionen sind multiplikativ.
- Produkte von multiplikativen Funktionen sind multiplikativ.

Beweis. (i) Es gilt

$$(f\alpha_y)(n) = \begin{cases} f(n), \ n \text{ hat nur Primteiler } p \leq y \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$(f\beta_y)(n) = \begin{cases} f(n), \ p|n \Rightarrow p > y \\ 0, \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $n = n_1 \cdot n_2$, wobei n_1 nur Primteiler kleiner gleich y und n_2 nur Primteiler echt größer y besitzt, gilt:

$$\begin{aligned}(f\alpha_y) * (f\beta_y)(n) &= \sum_{d|n} (f\alpha_y)(d)(f\beta_y)(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{\substack{d|n \\ p|d \Rightarrow p \leq y \\ p|(n/d) \Rightarrow p > y}} f(d)f(\frac{n}{d}) = f(n_1)f(n_2) = f(n).\end{aligned}$$

(ii) Es ist

$$\begin{aligned} f_y(n) &= \sum_{d|n} (f\alpha_y)(d)\beta_y(\frac{n}{d}) \\ &\geq \sum_{d|n} (f\alpha_y)(d)(f\beta_y)(\frac{n}{d}) \\ &= ((f\alpha_y) * (f\beta_y))(n) = f(n), \end{aligned}$$

da $f(\frac{n}{d}) \in [0, 1]$ ist.

(iii) h_y ist multiplikativ mit

$$h_y(p^i) = \sum_{0\le j\le i} \beta_y(p^{i-j})\mu(p^j) = \beta_y(p^i) - \beta_y(p^{i-1})$$
$$= \begin{cases} 0, \ p > y, \ i = 1 \\ 0, \ p > y, \ i > 1 \\ -1, \ p \le y, \ i = 1 \\ 0, \ p \le y, \ i > 1. \end{cases}$$

□

Beweis. (von 5.15) Wähle $y \in \mathbb{R}$ fest mit $y > 2$.

(i) Es ist

$$x^{-1}\sum_{n\le x} \beta_y(n) = x^{-1}\sum_{n\le x}\sum_{d|n} h_y(d) = x^{-1}\sum_{d\le x}[\frac{x}{d}]h_y(d).$$

Dies geht für $x \to \infty$ gegen

$$\sum_{d\ge 1}\frac{h_y(d)}{d} = \prod_{p\le y}(1-p^{-1}),$$

da $h_y(d) = 0$ für $d > N(y)$. Das heißt, β_y ist mittelbar mit $M(\beta_y)$.

(ii) Es gilt, dass

$$x^{-1}\sum_{n\le x} f_y(n) = x^{-1}\sum_{n\le x}\sum_{d|n}(f\alpha_y)(d)\beta_y(\frac{n}{d}) = \sum_{d\le x}\frac{f(d)\alpha_y(d)}{d}\cdot\frac{d}{x}\sum_{m\le x/d}\beta_y(m).$$

Seien g_d und $h_{d,x}$ reelle Zahlen größer gleich 0 und $h_{d,x} \in [0,1]$. Es gelte: $\sum_{d\le x} g_d \to G$ für $x \to \infty$ und $\lim_{x\to\infty} h_{d,x} = H$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{d\le x} g_d h_{d,x} = G\cdot H.$$

Setzt man nun $g_d = \frac{f(d)\alpha_y(d)}{d}$ und $h_{d,x} = \frac{d}{x}\sum_{m\le x/d}\beta_y(m)$, so konvergiert der gesamte Ausdruck

$$x^{-1}\sum_{n\le x} f_y(n)$$

gegen

$$M(f_y) := G \cdot H = \prod_{p \le y} (1 - p^{-1}) \sum_{i \ge 0} \frac{f(p^i)}{p^i},$$

mit

$$\sum_{d \ge 1} \frac{f(d)\alpha_y(d)}{d} = \prod_{p \le y} \sum_{i \ge 0} \frac{f(p^i)}{p^i} =: G$$

und

$$\frac{d}{x} \sum_{m \le x/d} \beta_y(m) \to M(\beta_y) =: H$$

nach (i). Die Funktion f_y ist also mittelbar mit dem Mittel $M(f_y)$.

(iii) D.h. für jedes $y > 2$ gilt für $x \to \infty$

$$x^{-1} \sum_{n \le x} f(n) \le M(f_y) + o(1).$$

(iv) $M(f_y)$ ist als Funktion von y fallend. Falls das Produkt für $M(f)$ nicht konvergiert, also den Wert 0 hat, ist $\lim_{y \to \infty} M(f_y) = 0$ und es ist klar, dass dann f mittelbar ist mit Mittelwert 0.

(v) Also konvergiert das Produkt

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-1})(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \underbrace{\frac{f(p) - 1}{p}}_{=: a_p \le 0} + \underbrace{\frac{f(p^2) - f(p)}{p^2}}_{=: b_p} + \cdots).$$

Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{p \in \mathbb{P}} (a_p + b_p)$ absolut. Ebenso $\sum_{p \in \mathbb{P}} b_p$, da $b_p = O(p^{-2})$. Also auch $\sum_{p \in \mathbb{P}} a_p$, da

$$|a_p| \le |a_p + b_p| + |b_p|.$$

Also konvergiert auch die Summe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 - f(p)}{p}$.

(vi) Es ist

$$\begin{aligned} f_y(n) - f(n) &= \prod_{\substack{p^i \| n \\ p \le y}} f(p^i) - \prod_{p^i \| n} f(p^i) = \prod_{\substack{p^i \| n \\ p \le y}} f(p^i)(1 - \prod_{\substack{p^i \| n \\ p > y}} f(p^i)) \\ &\le 1 - \prod_{\substack{p^i \| n \\ p > y}} f(p^i). \end{aligned}$$

Seien $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$. Dann sieht man mit Induktion, dass $1 - \Pi_{1\le i\le n} a_i \le \sum_{1\le i\le n}(1-a_i)$. Also ist

$$1 - \prod_{\substack{p^i || n \\ p>y}} f(p^i) \le \sum_{\substack{p^i || n \\ p>y}} (1 - f(p^i)).$$

(vii) Also ist

$$\sum_{n\le x}(f_y(n) - f(n)) \le \sum_{p>y}\sum_{i\ge 1}(1 - f(p^i))[\frac{x}{p^i}]. \quad (*)$$

Wegen

$$\sum_{i\ge 2}\frac{1-f(p^i)}{p^i} \le \sum_{i\ge 2} p^{-i} = \frac{p^{-2}}{1-p^{-1}} = \frac{1}{p(p-1)},$$

ist

$$(*) \le x\sum_{p>y}(\frac{1-f(p)}{p} + \frac{1}{p(p-1)}) =: x\cdot\epsilon(y).$$

(viii) $\epsilon(y)$ geht für $y\to\infty$ gegen 0, da separat gilt:

$$\sum_{p>y}\frac{1-f(p)}{p} \to 0 \text{ wegen (v)},$$
$$\sum_{p>y}\frac{1}{p(p-1)} \to 0.$$

(ix) Wegen (iii) ist

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{n\le x} f(n) \le M(f_y)$$

für alle $y > 2$. Wegen (vii) und (viii) ist

$$\liminf_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{n\le x} f(n) \ge M(f_y)$$

für alle $y > 2$. Also ist

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{n\le x} f(n) = \lim_{y\to\infty} M(f_y) = M(f).$$

□

6 Extremale Ordnungen von arithmetischen Funktionen

Definition 6.1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton steigende Funktion.

$$g \text{ ist Maximalordnung für } f \;:\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

(Ist g Maximalordnung für f und $c > 1$, so gibt es höchstens endlich viele n mit $f(n) \geq c \cdot g(n)$.)

$$g \text{ ist Minimalordnung für } f \;:\Leftrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

(Ist g Minimalordnung für f und $c < 1$, so gibt es höchstens endlich viele n mit $f(n) \leq c \cdot g(n)$.)

Satz 6.2. *Sei $f \in \mathfrak{A}$ und multiplikativ. Aus $\lim\limits_{\substack{q\to\infty \\ q \text{ Primzahlpotenz}}} f(q) = 0$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ ist.*

Beweis. q stehe für beliebige Primzahlpotenzen. Für alle $\epsilon \in (0,1)$ existiert ein $Q = Q(\epsilon)$ mit: $q > Q \Rightarrow |f(q)| < \epsilon$. Setze

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \{q \mid q \leq Q,\ |f(q)| \leq 1\}, \\ Q_2 &:= \{q \mid q \leq Q,\ |f(q)| > 1\}, \\ Q_3 &:= \{q \mid q > Q\}. \end{aligned}$$

Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist in eindeutigerweise ein Produkt $n = n_1 n_2 n_3$, wobei n_i ein Produkt aus Elementen von Q_i ist für $i = 1, 2, 3$. Es ist also $n_i = \prod\limits_{\substack{q \| n \\ q \in Q_i}} q$. Es gilt, dass $f(n) = f(n_1)f(n_2)f(n_3)$, mit

- $|f(n_1)| \leq 1$;
- $|f(n_2)| \leq A \in \mathbb{R}$, unabhängig von ϵ, da $Q_2 \subset \{q \mid |f(q)| > 1\}$, was endlich nach Voraussetzung ist;
- $|f(n_3)| < \epsilon$.

Deshalb ist $|f(n)| \leq \epsilon \cdot A$ und $\limsup_{n\to\infty} |f(n)| \leq \epsilon \cdot A$ für alle $\epsilon \in (0,1)$. Also gilt insgesamt: $\limsup_{n\to\infty} |f(n)| = 0$. □

Korollar 6.3. *Für alle $\epsilon > 0$ gilt: $\tau(n) = O_\epsilon(n^\epsilon)$. ($O_\epsilon$ heißt: die implizite Konstante hängt von ϵ ab.)*

Beweis. Die Funktion $f(n) = \tau(n)n^{-\epsilon}$ ist multiplikativ und $f(p^r) = (r+1)p^{-r\epsilon}$ geht für $p^r \to \infty$ gegen 0. Also ist $\lim_{n\to\infty} \tau(n)n^{-\epsilon} = 0$, d.h. $\tau(n) = o(n^\epsilon) = O_\epsilon(n^\epsilon)$. □

Verschärfung:

Satz 6.4. *Die Funktion $\log \tau(n)$ hat $\log(2)\frac{\log n}{\log\log n}$ als Maximalordnung.*

Beweis. Zu zeigen ist: Für alle $\epsilon > 0$ gilt

(i)
$$\exists n_0(\epsilon): \ \forall n \geq n_0 \text{ ist } \tau(n) < \exp((1+\epsilon)\log 2\frac{\log n}{\log\log n});$$

(ii) es existieren unendlich viele n mit
$$\tau(n) > \exp((1-\epsilon)\log 2\frac{\log n}{\log\log n}).$$

Zu (i):

(a) Sei n gegeben. Zu $t \in \mathbb{R}$ mit $2 \leq t \leq n$ gilt:

$$\tau(n) = \prod_{p^i || n} (i+1) \leq \underbrace{\prod_{\substack{p^i || n \\ p \leq t}} (i+1)}_{=:\Pi_1} \underbrace{\prod_{\substack{p^i || n \\ p > t}} 2^i}_{=:\Pi_2}.$$

(b) Jedes der $i+1$ ist kleiner gleich

$$1+\frac{\log n}{\log p} \leq 1+\frac{\log n}{\log 2}.$$

Die Zahl der Faktoren von Π_1 ist kleiner gleich $\pi(t) \leq t$. Für $x >> 0$ ist $1+\frac{x}{\log 2} \leq e^2 x$, also

$$\log(1+\frac{x}{\log 2}) \leq 2+\log x,$$

und somit für $x = \log n$:

$$\log(1+\frac{\log n}{\log 2}) \leq 2+\log\log n.$$

Damit folgt, dass

$$\Pi_1 \leq (1+\frac{\log n}{\log 2})^t \leq \exp(t(2+\log\log n)).$$

(c) Wegen $p^{\log 2/\log p} = 2$ und somit $p^{\log 2/\log t} \geq 2$ für $p > t$ ist

$$\Pi_2 \leq (\prod_{\substack{p^i || n \\ p>t}} p^i)^{\log 2/\log t} \leq n^{\log 2/\log t} = \exp(\frac{\log 2}{\log t}\log n).$$

(d) Insgesamt ist also

$$\tau(n) \leq \exp(t(2+\log\log n) + \log 2\frac{\log n}{\log t}).$$

Wähle $t = \frac{\log n}{(\log\log n)^3}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tau(n) &\leq \exp\left(\frac{\log 2\log n}{\log\log n}\left(\underbrace{\frac{(2/\log 2)+(1/\log 2)\log\log n}{(\log\log n)^2}}_{\to 0} + \frac{1}{1-\underbrace{\frac{3\log\log\log n}{\log\log n}}_{\to 0}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\log 2\log n}{\log\log n}(1+o(n))\right).\end{aligned} \tag{6.1}$$

Also folgt (i).

Zu (ii): Finde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \infty$, sodass

$$\tau(n_k) > \exp((1-\epsilon)\log 2 \frac{\log n}{\log\log n}).$$

(a) Definiere $n_k := \prod_{j\leq k} p_j$ als Produkt der ersten k Primzahlen. Dann ist $\tau(n_k) = 2^k$ und $\log n_k = \sum_{p\leq p_k} \log p = \vartheta(p_k) \leq k\log p_k$. Also ist

$$\log(\tau(n_k)) = k\log 2 \geq \log 2 \frac{\log(n_k)}{\log(p_k)}.$$

(b) Wir wissen aus Definition/Satz 4.12, dass $\vartheta(x) = \psi(x) + O(x^{1/2}\log x)$ mit $\psi(x) = \sum_{p^e\leq x} \log p$. Des Weiteren wissen wir, dass $\psi(x) \geq [x]\log 2$ (4.12 (vi)). Hieraus folgt für jede reelle Zahl $a < \log 2$, dass $\vartheta(x) \geq ax$ für alle $x >>_a 0$. Also folgt für $x = p_k$ und $k >>_a 0$: $\log(n_k) = \vartheta(p_k) \geq ap_k$, also $\log\log n_k \geq \log a + \log p_k$. Insgesamt erhalten wir also

$$\log p_k \leq \log\log n_k (1 - \frac{\log a}{\log\log n_k}).$$

(c) Also gilt wegen (a):

$$\log\tau(n_k) \geq \log 2 \frac{\log(n_k)}{\log(p_k)} \geq \frac{\log 2\log(n_k)}{\log\log n_k}(1 + O(\frac{1}{\log\log n_k})), \tag{6.2}$$

und somit (ii).

□

Satz 6.5. *Es gilt:*

(i) $\omega(n)$ *hat* $\frac{\log n}{\log\log n}$ *als Maximalordnung.*

(ii) $\Omega(n)$ *hat* $\frac{\log n}{\log 2}$ *als Maximalordnung.*

(iii) $\omega(n)$ *und* $\Omega(n)$ *haben 1 als Minimalordnung.*

Beweis. (i) Für $n = p^i$ ist

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)} \leq n.$$

Die ersten beiden Ungleichheiten sind genau dann Gleichheiten, wenn $\mu^2(n) = 1$ und die letzte Ungleichheit genau dann, wenn $n = 2^k$ ist. Aus (6.1) (siehe Beweis von Satz 6.4) ergibt sich

$$\omega(n) \leq \frac{\log \tau(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log \log n}(1 + o(n)),$$

d.h. die gesuchte obere Abschätzung. Dass sie im Wesentlichen optimal ist (bis auf den Faktor (1+o(n))), folgt aus (6.2), denn die n_k sind quadratfrei, also

$$\frac{\log \tau(n_k)}{\log 2} = \omega(n_k).$$

(ii) Es ist $\Omega(n) \leq \log n / \log 2$ wegen $2^{\Omega(n)} \leq n$ und dies wird für $n = 2^k$ zur Gleichheit und unendlich oft angenommen, also (ii).

(iii) Klar.

□

Satz 6.6. *$\varphi(n)$ hat*

(i) n als Maximalordnung und

(ii)

$$e^{-\gamma}\frac{n}{\log \log n}$$

als Minimalordnung (γ ist die Euler-Mascheroni-Konstante, also $e^{-\gamma} = 0,561459...$).

Beweis. (i) Klar, denn für $n = p^i$ ist $\varphi(n) = p^i(1-p^{-1})$ und somit ist $\varphi(n)/n = 1 - p^{-1}$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

(a) Für $m \in \mathbb{N}$ mit $\pi(m) \geq \omega(n)$ ist

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - p^{-1}) \geq n \prod_{p \leq m}(1 - p^{-1}).$$

(b) Nach EAZ 10.6 ist

$$\log 2 \frac{m}{\log m} \leq \pi(m) \leq (\log 4 + 8\frac{\log \log m}{\log m})\frac{m}{\log m}$$

für $m \geq 4$. Also ist $\pi(m) \geq \omega(n)$ erfüllt für $m/\log m \geq \omega(n)/\log 2$. Weiter können wir annehmen, dass m nicht „zu groß“ ist, d.h. $\log m \leq A \cdot \log \omega(n)$ mit einer reellen Konstanten $A > 0$. Dann wird $\pi(m) \geq \omega(n)$ erfüllt sein, wenn $m \geq B\omega(n) \log \omega(n)$ mit $B = A/\log 2$. Wir setzen also $m := [B\omega(n) \log \omega(n)]$.

(c) Es ist nach Satz 6.5 (i)

$$m = O\left(\frac{\log n}{\log\log n} \cdot \log(\frac{\log n}{\log\log n})\right) = O(\log n).$$

Nach der Formel von Mertens (Satz 3.7) gilt:

$$\prod_{p\leq x}(1-p^{-1}) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}(1+O(\frac{1}{\log x})).$$

Also ist

$$\varphi(n) \geq n \cdot \frac{e^{-\gamma}}{\log m}(1+O(\frac{1}{\log m})) \geq n \cdot \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n}(1+O(\frac{1}{\log\log n})).$$

(d) Um zu zeigen, dass diese untere Abschätzung im Wesentlichen optimal ist, müssen wir eine Teilfolge konstruieren, die asymptotisch die Schranke erreicht. Dafür nehmen wir die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Satz 6.4, also $n_k = \prod_{j\leq k} p_j$. Für diese gilt

$$\frac{\varphi(n_k)}{n_k} = \prod_{p\leq p_k}(1-p^{-1}) = \frac{e^{-\gamma}}{\log p_k}(1+O(\frac{1}{\log p_k})).$$

(e) Nach Satz/Definition 4.12 ist

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \vartheta(x) + O(x^{1/2}\log x).$$

Wir haben gezeigt:

$$\vartheta(x) \leq \log 4[x],$$
$$\psi(x) \geq \log 2[x].$$

In Wirklichkeit gilt sogar für alle $a < \log 2$ und $A > \log 4$:

$$ax \leq \vartheta(x) \leq \psi(x) \leq Ax$$

für alle $x >>_{a,A} 0$. Dies haben wir implizit gezeigt in EAZ, 10.6. Deshalb ist $\log x = \log \vartheta(x) + O(1)$.

(f) Es ist $\vartheta(p_k) = \sum_{p \leq p_k} \log p = \log n_k$, also

$$\log \log n_k = \log \vartheta(p_k) = \log p_k + O(1).$$

Insgesamt also:

$$\frac{\varphi(n_k)}{n_k} = \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n_k}(1 + O(\frac{1}{\log \log n_k})),$$

was zeigt, dass $e^{-\gamma}/\log \log n$ tatsächlich die Minimalordnung ist.

□