Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zu Einführung in die analytische Zahlentheorie
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Beweisen Sie die folgenden Potenzreihenidentitäten in $\mathbb{Q}[[X]]$:
(i) $\sum_{n\geq 0}(n+1)X^n = \frac{1}{(1-X)^2}$.
(ii) Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge aus $\mathbb{Q}$ und $A_n = \sum_{0\leq i\leq n} a_i$, so ist

$$\sum_{n\geq 0} A_n X^n = (1-X)^{-1}\sum_{n\geq 0} a_n X^n \,.$$

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine ganze Zahl nicht durch die ersten n Primzahlen teilbar ist?
D.h., zeigen Sie, dass der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie seinen Wert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{1\leq m\leq x \mid \mathrm{ggT}(m,p_k)=1\,\forall\, 1\leq k\leq n\}}{\#\{1\leq m\leq x\}} \,.$$

Aufgabe 3. *(10 = 1 + 1 + 1 +3 + 2 + 2 Punkte)*
In der ganzen Aufgabe seien f, g und h Funktionen auf $\mathbb{N}$.
Wir schreiben: $f = O(g)$, falls $C > 0, N > 0$ existieren, mit

$$\forall n \geq N:\ |f(n)| \leq C\,|g(n)| \,.$$

Zeigen Sie:
(i) $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$.
(ii) $f = O(g), g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$.
(iii) $f = O(g) \Rightarrow fh = O(gh)$.
(iv) die gültigen unter den folgenden Implikationen

$$\begin{aligned} f = O(g) \quad \Longrightarrow \quad & f + h = O(g+h) \\ & f + h = O(|g+h|) \\ & f + h = O(|g| + |h|)\,. \end{aligned}$$

(v) $\sum_{i=0}^{d} a_i n^i = O(n^d)$ für $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ beliebig.
(vi) Sind $a, b > 0$, so gilt: $\log_a(n) = O(\log_b(n))$.

- Bitte wenden -

Aufgabe 4. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es bezeichne p_k die k-te Primzahl und $\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$ die Primzahlfunktion.
Zeigen Sie
(i) $\pi(p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m) \geq 2m + 4$ für $m \geq 3$.
(ii) $p_{m+1}^2 < p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ für $m \geq 4$.

Hinweis: Nutzen Sie die (bewiesene) *Bertrand'sche Vermutung*, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ existiert.

Abgabe am Dienstag, den 17.05.2016 vor der Vorlesung