Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

3. Übung zu Einführung in die analytische Zahlentheorie
SS 2016

Aufgabe 1. *(12 Punkte)*
Die Fibonacci-Zahlen F_n sind definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \; (n \geq 1). \end{aligned}$$

Finden Sie einen rationalen Ausdruck $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Potenzreihe gerade $\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$ ist.

Aufgabe 2. *(12 Punkte)*
Es sei α aus dem Intervall $(-1, \infty)$.
Zeigen Sie, dass aus $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ schon

$$\sum_{p \leq x,\, p \text{ prim}} p^{\alpha} \sim \frac{1}{(1+\alpha)} \frac{x^{1+\alpha}}{\log(x)}$$

folgt.

Hinweis: Schreiben Sie die Summe als ein Riemann-Stieltjes-Integral, zeigen Sie

$$\int_2^x \frac{t^{\alpha}}{\log(\mathrm{t})\mathrm{dt}} \sim \frac{1}{(1+\alpha)} \frac{x^{1+\alpha}}{\log(x)}$$

und verwenden Sie dies zum Beweis der Aussage.

Aufgabe 3. *(16 = 8 + 8 Punkte)*
Es sei p_n die n-te Primzahl und $d_n := p_{n+1} - p_n$.
Zeigen Sie unter der Annahme $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ des Primzahlsatzes:
(i) $p_n \sim n\log(n)$;
(ii) $\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{d_n}{\log(n)} \sim x$.

Hinweis: Verwenden Sie Proposition 1.9 mit $a_n = d_n$, $b(x) = \frac{1}{\log(x)}$ $(x \geq 2)$.

Abgabe am Dienstag, den 31.05.2016 vor der Vorlesung