Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

4. Übung zu Einführung in die analytische Zahlentheorie
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : [c, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Funktionen mit

- $g(x) > 0$ für alle $x \in [c, \infty)$;
- für alle $x \in [c, \infty)$ existieren $\int_c^x f(t)\mathrm{dt}$ und $\int_c^x g(t)\mathrm{dt}$;
- $\lim_{x\to\infty} \int_c^x g(t)\mathrm{dt} = \infty$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:
(i) $f = o(g) \Rightarrow \int_c^x f(t)\mathrm{dt} = o(\int_c^x g(t)\mathrm{dt})$;
(ii) $f \sim g \Rightarrow \int_c^x f(t)\mathrm{dt} \sim \int_c^x g(t)\mathrm{dt}$.

Aufgabe 2. *(20 = 10 + 10 Punkte)*
(i) Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \frac{1}{p} = \log(2)\,.$$

(ii) Leiten Sie daraus ab:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\#\{n \leq x \mid n \text{ hat einen Primfaktor } > \sqrt{n}\}}{x} > 0\,.$$

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $H_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ die n-te harmonische Zahl.
Zeigen Sie: $H_n \notin \mathbb{Z}$ für $n > 1$.

Abgabe am Dienstag, den 14.06.2016 vor der Vorlesung