Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

5. Übung zu Einführung in die analytische Zahlentheorie
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 4 + 6 Punkte)*
Zeigen Sie:
(i) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1\,.$$

(ii) Ist die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ schwach multiplikativ, so auch $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Aufgabe 2. *(10 = 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 Punkte)*
Zeigen Sie die folgenden Eigklhjlenschaften der arithmetischen Funktionen $\varphi, \sigma, \tau, \omega$ und Ω:
(i) $\varphi(n) = 1 \Leftrightarrow n = 1, 2$.
(ii) $\varphi(n) = 2 \Leftrightarrow n = 3, 4, 6$.
(iii) $\tau(n)$ ungerade $\Leftrightarrow n$ ist ein Quadrat.
(iv) $\sigma(n)$ ist ungerade, falls $n = m^2$ oder $n = 2m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Gilt auch die Umkehrung?
(v) $2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
(vi) $\frac{6}{\pi^2} \cdot n^2 < \sigma(n)\varphi(n) < n^2$, für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Aufgabe 3. *(20 = 3 + 3 + 4 + 5 + 5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die folgenden Dirichlet-Reihen für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ konvergieren und im Konvergenzbereich die angegebenen Identitäten gelten:
(i) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_k(n) n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s-k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.
(ii) $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\omega(n)} n^{-s} = \zeta(s)^2/\zeta(2s)$.
(iii) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{\Omega(n)} n^{-s} = \zeta(2s)/\zeta(s)$.
(iv) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) n^{-s} = \zeta(s-1)/\zeta(s)$.
(v) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(n) n^{-s} = -\zeta'(s)/\zeta(s)$.

*Hinweis zu (*v*):* Hier können Sie $s \in \mathbb{R}$ und die reelle Ableitung $\zeta'(s)$ verwenden.

Abgabe am Dienstag, den 28.06.2016 vor der Vorlesung