Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Informationen zur Vorlesung

Es besteht bei dieser Vorlesung keine Abgabepflicht von Übungsaufgaben. Stattdessen werden jede Woche ein oder mehrere Probleme ausgegeben, über die Sie einige Tage nachdenken können. Die Probleme werden in der nächsten Woche dann in der Übung gemeinsam mit Herrn Stopp bearbeitet. Wenn Sie etwas zu den Problemen abgeben möchten, können Sie dies auf freiwilliger Basis tun.
Die Zulassung zur Abschlussprüfung erwerben Sie durch regelmäßige Teilnahme an Vorlesung und Übung.

Problem 1.
Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt *algebraisch* (über $\mathbb{Q}$), wenn es ein Polynom P über $\mathbb{Q}$ gibt mit $P(a) = 0$. Die Menge der algebraischen Zahlen heiße $\overline{\mathbb{Q}}$.
(i) Wie können Sie die Eigenschaft "$a \in \overline{\mathbb{Q}}$" mit Hilfe der Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(a)$ beschreiben?
(ii) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Körper ist.
(iii) Geben Sie sich zwei algebraische Zahlen vor, deren Minimalpolynom Sie kennen (z.B. $a = \sqrt{3}$ und $b = \sqrt[3]{2}$). Wie könnnen Sie das Minimalpolynom von $a + b$ finden?
(iv) Hängt das Minimalpolynom von $a + b$ nur von den Minimalpolynomen von a und b ab, oder auch von den konkreten Werten von a und von b?
(v) Gibt es einen Algorithmus, der aus zwei algebraischen Zahlen a und b und deren Minimalpolynomen das Minimalpolynom von $a + b$ berechnet?
(vi) Wiederholen Sie Ihre Überlegungen mit $a \cdot b$.