Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Hinweis: Auf diesem Blatt seien alle auftretenden Ringe und Algebren kommutativ.

Problem 15.
Berechnen Sie die folgenden Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$, mit $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, mit $m, n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}$;
- $F \otimes \mathbb{Q}$, mit einer endlichen abelschen Gruppe F;
- $T \otimes \mathbb{Q}$, mit einer abelschen Torsionsgruppe T (d.h. jedes Element von T hat endliche Ordnung).

Problem 16.
Es sei $K \mid \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung.
(i) Berechnen Sie: $\mathcal{O}_K \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$.
Nachfolgend sei zusätzlich $\mathbb{Q}(i) \subset K$. Berechnen Sie:
(ii) $\mathcal{O}_K \underset{\mathbb{Z}[i]}{\otimes} \mathbb{Q}(i)$;
(iii) $\mathcal{O}_K \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}(i)$.

Problem 17.
Es sei R ein Ring, M_1, M_2, N seien R-Moduln.
Zeigen Sie:
(i) Ist $f : M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus, so existiert ein wohldefinierter Homomorphismus "$f \otimes \mathrm{id}_N$" von $M_1 \otimes N$ nach $M_2 \otimes N$, der auf reinen Tensoren $m \otimes n$, mit $m \in M_1, n \in N$, jeweils die Werte $f(m) \otimes n$ annimmt.
(ii) Ist f surjektiv, so ist auch $f \otimes \mathrm{id}_N$ surjektiv.
(iii) Gilt die entsprechende Aussage auch für "injektiv"? (Beweis oder Gegenbeispiel!)
(iv) Ist R ein Integritätsbereich, $S \subset R$ eine multiplikative Menge, M ein R-Modul, so ist $M \otimes R[S^{-1}] \xrightarrow{\cong} M[S^{-1}]$.