

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp



Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,
WS 2012/2013

Problem 18.

Bestimmen Sie die Nullstellen α und $\beta \in \mathbb{Z}_5$ von $f(X) := X^2 + 1$ modulo 5^n für möglichst großes n .

Wenn Sie die Nullstelle α durch einen Wert $\bar{\alpha}$ bis auf einen Fehler ε bestimmt haben (also $|\alpha - \bar{\alpha}| < \varepsilon$), wie groß ist dann der Fehler $|f(\alpha) - f(\bar{\alpha})|$?

Problem 19.

(i) Es sei $f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{Q}_p$.

Wie lässt sich in dieser Situation der Begriff der Konvergenz für ein $x \in \mathbb{Q}_p$ fassen?

Überprüfen Sie inwiefern sich die "üblichen" Begrifflichkeiten und Aussagen wie zum Beispiel "Konvergenzradius" und die entsprechende Formel von Cauchy-Hadamard übertragen lassen.

(ii) Es seien

$$\exp(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!}$$
$$\log(1 + X) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}$$

die üblichen Potenzreihen.

- Für welche Werte $x \in \mathbb{Q}_p$ konvergiert $\exp(x)$ bzw. $\log(1 + x)$?
- Zeigen Sie: Im Konvergenzbereich haben \exp und \log die "üblichen" Eigenschaften. Führen Sie diese auf und begründen Sie ihre Richtigkeit.
- Bestimmen Sie die Struktur der *multiplikativen* Gruppe \mathbb{Z}_p^* . (Beschreiben Sie sie mittels der *additiven* Gruppe, wobei Sie die Fälle $p = 2$, $p > 2$ unterscheiden müssen!)