Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Problem 18.
Bestimmen Sie die Nullstellen α und $\beta \in \mathbb{Z}_5$ von $f(X) := X^2 + 1$ modulo 5^n für möglichst großes n.
Wenn Sie die Nullstelle α durch einen Wert $\overline{\alpha}$ bis auf einen Fehler ε bestimmt haben (also $|\alpha - \overline{\alpha}| < \varepsilon$), wie groß ist dann der Fehler $|f(\alpha) - f(\overline{\alpha})|$?

Problem 19.
(*i*) Es sei $f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{Q}_p$.
Wie lässt sich in dieser Situation der Begriff der Konvergenz für ein $x \in \mathbb{Q}_p$ fassen? Überprüfen Sie inwiefern sich die "üblichen" Begrifflichkeiten und Aussagen wie zum Beispiel "Konvergenzradius" und die entsprechende Formel von Cauchy-Hadamard übertragen lassen.
(*ii*) Es seien

$$\begin{aligned} \exp(X) &= \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \\ \log(1+X) &= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n} \end{aligned}$$

die üblichen Potenzreihen.

- Für welche Werte $x \in \mathbb{Q}_p$ konvergiert $\exp(x)$ bzw. $\log(1+x)$?
- Zeigen Sie: Im Konvergenzbereich haben exp und log die "üblichen" Eigenschaften. Führen Sie diese auf und begründen Sie ihre Richtigkeit.
- Bestimmen Sie die Struktur der *multiplikativen* Gruppe $\mathbb{Z}_p^*$.
  (Beschreiben Sie sie mittels der *additiven* Gruppe, wobei Sie die Fälle $p = 2$, $p > 2$ unterscheiden müssen!)