Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,
WS 2012/2013

Problem 20.
Es sei A ein vollständiger diskreter Bewertungsring und B eine A-Algebra von endlichem Typ (d.h. B ist als A-Modul endlich erzeugt).
Zeigen Sie: Dann kann jedes idempotente Element $\overline{e}$ von $B/\mathfrak{p}B$ zu einem idempotenten Element e von B geliftet werden. (Dabei ist $\mathfrak{p}B$ das vom Bild von $\mathfrak{p}$ in B erzeugte Ideal.)

Problem 21.
Es seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$ (also n Polynome in n Unbestimmten).
Für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ sei $J(\underline{x})$ die Jacobimatrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(\underline{x})\right)_{1 \le i,j \le n}$.
Weiterhin erfülle $\underline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ die Bedingungen

- $f_i(\underline{x}^{(0)}) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ für $1 \le i \le n$;
- $\left|\det(J(\underline{x}^{(0)})\right| = 1$.

Zeigen Sie: Dann gibt es eine wohlbestimmte Lösung $\underline{x}$ des Gleichungssystems $f_1(\underline{x}) = \ldots = f_n(x) = 0$ mit $\underline{x} \equiv \underline{x}^{(0)} \bmod p$.

Zusatz: Formulieren (und evtl. beweisen) Sie als Konsequenz dieser mehrdimensionalen Version des Lemmas von Hensel den Satz von der Umkehrfunktion für p-adische Zahlen.