Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Problem 22.
Es sei K eine vollständiger, diskret bewerteter Körper mit normierter Bewertung v. Diese sei in eindeutiger Weise auf den algebraischen (separablen) Abschluss $\overline{K}$ fortgesetzt zu $v : \overline{K} \to \mathbb{Q} \cup \infty$.
Es sei weiter

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-2}X^2 + a_{n-1}X + a_n$$

ein separables Polynom über K.
Betrachten Sie die Punkte $P_i = (i, v(a_i))$ im zweidimensionalen Raum und deren untere konvexe Hülle (wobei die P_i mit $a_i = 0$ weggelassen werden). Diese wird nach unten durch eine Serie von Geradenabschnitten begrenzt. Diese Geradenabschnitte sollen $l_1, \ldots, l_k$ heißen.
Es sei m_i die Steigung von l_i und p_i die Länge der Projektion von l_i auf die x-Achse, d.h. $p_i \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie: Es gibt genau p_j Nullstellen von P in $\overline{K}$ mit Bewertung m_j.
(ii) Folgern Sie daraus das Eisensteinkriterium über $\mathbb{Z}_p$ und verallgemeinern Sie es für allgemeine diskret bewertete Körper.

(iii) Zeigen Sie, dass das Polynom $P(X) = X^5 + 2X^2 + 4$ über $\mathbb{Q}_2$ in zwei irreduzible Faktoren vom Grad 2 bzw. 3 zerfällt.
Wie zerfällt $X^5 + X + 4$ über $\mathbb{Q}_2$?

(iv) Formulieren und beweisen Sie eine Verallgemeinerung des Eisensteinkriteriums.