Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Problem 3. *Idealtheorie in* $\mathbb{Z}[i]$
Es sei $A = \mathbb{Z}[i]$ und N bezeichne die Normabbildung. Es ist bekannt, dass A ein Hauptidealring ist.

Zeigen Sie:

(i) $A^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

Nachfolgend sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 4$.
(ii) -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.
(iii) p ist kein Primelement in A.
(iv) p besitzt eine Darstellung $p = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Diese ist bis auf die Vorzeichen von a und b eindeutig.

Es sei nun p eine Primzahl mit $p \equiv 3 \bmod 4$.
(v) p besitzt *keine* Darstellung $p = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.
(vi) p bleibt prim in A.

(vii) Ein vollständiges Repräsentantensystem für die Primelemente von A (d.h. modulo Einheiten) ist gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} \alpha) & \pi = 1 + i; & \\ \beta) & \pi = a + bi, & a^2 + b^2 = p,\ p \equiv 1 \bmod 4,\ a > |b| > 0; \\ \gamma) & \pi = p, & p \equiv 3 \bmod 4. \end{array}$$

$(viii)$ Sind $m, n \in \mathbb{N}$ jeweils Summe zweier Quadrate, so auch mn.
(ix) Sei $n = \prod_i p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

n ist die Summe zweier Quadrate $\Longleftrightarrow$ e_i ist gerade für alle p_i mit $p_i \equiv 3 \bmod 4$.

- Bitte wenden -

Problem 4.

Im Folgenden sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.

(i) Bestimmen Sie den Ganzheitsring und die Einheitengruppe von K.

(ii) Zeigen Sie: K ist kein Hauptidealring.

(iii) Nach (ii) ist K kein euklidischer Ring. Finden Sie $a, b \in \mathcal{O}_K$, für die keine $q, r \in \mathcal{O}_K$ existieren mit $a = qb + r$ und $N(r) < N(b)$.

(iv) Zerlegen Sie (15) in Primideale. Schreiben Sie jedes solche Ideal als Erzeugnis von maximal 2 Elementen.

(v) Zeigen Sie, dass die Ideale in (iv) keine Hauptideale sind. Sind unter den Idealen in (iv) einige zueinander äquivalent?

(vi) Finden Sie die Ordnung der Ideale in der Klassengruppe $C(K)$.

(vii) Man kann zeigen: Die Klassenzahl h von K ist ≤ 5. Bestimmen Sie die Struktur der Klassengruppe und finden Sie für jedes Element der Klassengruppe einen Repräsentanten.

$(viii)$ Beweisen Sie Ihre Behauptungen über die Klassengruppe, ohne die vorgegebene Abschätzung $h \leq 5$ zu verwenden.