Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Die beiden folgenden Übungen sind Programmierübungen. Grundlage für beide Aufgaben ist das Programm PARI/GP, welches kostenlos auf der Seite

http://pari.math.u-bordeaux.fr/

erhältlich ist. Auf der Seite befindet sich auch eine ausführliche Dokumentation.

Problem 5.

Faktorisieren Sie

(1) $2^{2^7}+1$ in $\mathbb{Z}$,
(2) $X^{105}-1$ über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_7$,
(3) $X^{17}-1$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

(Hierzu sind die folgenden Funktionen in PARI/GP hilfreich: `Mod, factor, factornf`)

Problem 6.

(1) Benutzen Sie PARI/GP um für den Körper $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ die Klassengruppe und deren Struktur zu bestimmen. Geben Sie Repräsentanten der einzelnen Idealklassen an. Verifizieren Sie mit Hilfe von PARI/GP, dass $I_1=4\mathbb{Z}+(2+2\sqrt{-21})\mathbb{Z}$ und $I_2=10\mathbb{Z}+(4+2\sqrt{-21})\mathbb{Z}$ ganze Ideale von K sind und bestimmen Sie deren Norm und $\mathbb{Z}$-Basen für $(I_1)^{-1}, I_1\cap I_2, I_1+I_2, I_1 * I_2$ und I_1/I_2. Zerlegen Sie I_1, I_2 in Primideale.
(Hinweis: In der Dokumentation von PARI/GP finden Sie die Funktionen `bnfinit`, `nfisideal`, `idealnorm, idealinv`, `idealadd`, `idealmul`, `idealfactor`, etc.. Insbesondere ist die Klassengruppe von `L = bnfinit(f(x))` durch `L.clgp` gegeben.)
(2) Zählen Sie ab wieviele ganze Ideale jeder Idealklasse von K aus (1) eine Norm kleiner als 10000 haben. Gibt es gravierende Unterschiede von Klasse zu Klasse oder herrscht in etwa Gleichverteilung?
(Hinweis: Hilfreich sind hier insbesondere `ideallist`, `bnfisprincipal`.)
(3) Durchlaufen Sie alle imaginärquadratischen Zahlkörper deren Diskriminanten höchstens den Absolutbetrag 5000 haben und zählen Sie für $r=1,2,3,4$ wieviele der Körper eine Klassengruppe vom Rang r haben. Was fällt auf?