Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,

WS 2012/2013

Problem 9.
(i) Zeigen Sie, dass die Mengen

$$R_1 := \widehat{(\mathbb{Z}, |\cdot|_p)},$$

also die Komplettierung von $\mathbb{Z}$ bezüglich des p-adischen Absolutbetrags, und

$$R_2 := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i \mid c_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\},$$

also die Menge der "formalen Potenzreihen" mit Koeffizienten in $\{0, \ldots, p-1\}$ jeweils natürliche Ringstrukturen tragen und zueinander (als Ringe) kanonisch isomorph sind.
Der dadurch beschriebene Ring heißt der Ring $\mathbb{Z}_p$ der *p-adischen (ganzen) Zahlen.*
(ii) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ist ein diskreter Bewertungsring.
Geben Sie alle Ideale von $\mathbb{Z}_p$ an.
(iii) Beschreiben Sie in beiden Varianten, wie sich der Ring $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ einbettet.
(iv) Finden Sie die p-adischen Entwicklungen (d.h. die Darstellungen als Potenzreihen in p) von -1 und von $\frac{1}{2}$ in $\mathbb{Z}_3$.
(v) Zeigen Sie, dass ein $a \in \mathbb{Z}_p$ genau dann invertierbar ist, wenn $p \nmid a$ gilt.
(vi) $\mathbb{Z}_p = R_1$ trägt eine natürliche Topologie. Wie sieht diese Topologie auf R_2 aus?
Konkreter: Geben Sie eine möglichst einfache Umgebungsbasis für $a = 0$ an.
(*Erinnerung*: Eine Umgebungsbasis ist eine Sammlung U_i von Umgebungen von a, sodass *jede* Umgebung von a schon ein U_i enthält.)
Wie sieht für $a \in \mathbb{Z}_p$ die Zusammenhangskomponente von a aus?
(vii) Beschreiben Sie in möglichst einfacher Weise den Körper $\mathbb{Q}_p$, zu dem sich $\mathbb{Z}_p$ ergänzen lässt.

- Bitte wenden -

Problem 10.
Es sei F ein Körper und $K = F(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten X über F. Bestimmen Sie die in Satz 3.15 auftretenden Objekte zum Körper K, d.h.
(i) die normierten diskreten Bewertungen v auf K mit $v(F^*) = \{0\}$;
(ii) die (Äquivalenzklassen von) nichtarchimedischen Absolutbeträgen "$|\cdot|$" auf K mit $|F^*| = \{1\}$
und
(iii) die diskreten Bewertungsringe $A \subset K$ mit $\mathrm{Quot}(A) = K$ und $F \subset A$.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Satz von Ostrowski 3.19.