Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

# Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,

# WS 2012/2013

**Problem 9.**
($i$) Zeigen Sie, dass die Mengen

$$R_1 := \widehat{(\mathbb{Z}, |\cdot|_p)}\,,$$

also die Komplettierung von $\mathbb{Z}$ bezüglich des $p$-adischen Absolutbetrags, und

$$R_2 := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i \mid c_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\},$$

also die Menge der "formalen Potenzreihen" mit Koeffizienten in $\{0, \ldots, p-1\}$ jeweils natürliche Ringstrukturen tragen und zueinander (als Ringe) kanonisch isomorph sind.
Der dadurch beschriebene Ring heißt der Ring $\mathbb{Z}_p$ der *$p$-adischen (ganzen) Zahlen.*
($ii$) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ist ein diskreter Bewertungsring.
Geben Sie alle Ideale von $\mathbb{Z}_p$ an.
($iii$) Beschreiben Sie in beiden Varianten, wie sich der Ring $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ einbettet.
($iv$) Finden Sie die $p$-adischen Entwicklungen (d.h. die Darstellungen als Potenzreihen in $p$) von $-1$ und von $\frac{1}{2}$ in $\mathbb{Z}_3$.
($v$) Zeigen Sie, dass ein $a \in \mathbb{Z}_p$ genau dann invertierbar ist, wenn $p \nmid a$ gilt.
($vi$) $\mathbb{Z}_p = R_1$ trägt eine natürliche Topologie. Wie sieht diese Topologie auf $R_2$ aus?
Konkreter: Geben Sie eine möglichst einfache Umgebungsbasis für $a = 0$ an.
(*Erinnerung*: Eine Umgebungsbasis ist eine Sammlung $U_i$ von Umgebungen von $a$, sodass *jede* Umgebung von $a$ schon ein $U_i$ enthält.)
Wie sieht für $a \in \mathbb{Z}_p$ die Zusammenhangskomponente von $a$ aus?
($vii$) Beschreiben Sie in möglichst einfacher Weise den Körper $\mathbb{Q}_p$, zu dem sich $\mathbb{Z}_p$ ergänzen lässt.

- Bitte wenden -

**Problem 10.**
Es sei $F$ ein Körper und $K = F(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten $X$ über $F$. Bestimmen Sie die in Satz 3.15 auftretenden Objekte zum Körper $K$, d.h.
($i$) die normierten diskreten Bewertungen $v$ auf $K$ mit $v(F^*) = \{0\}$;
($ii$) die (Äquivalenzklassen von) nichtarchimedischen Absolutbeträgen "$|\cdot|$" auf $K$ mit $|F^*| = \{1\}$
und
($iii$) die diskreten Bewertungsringe $A \subset K$ mit $\mathrm{Quot}(A) = K$ und $F \subset A$.

*Hinweis*: Orientieren Sie sich am Satz von Ostrowski 3.19.