

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1, Mathematik  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
M.Sc. Philipp Stopp



Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,  
WS 2012/2013

**Problem 11.**

Es seien  $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ,  $K_2 := \mathbb{Q}(\zeta_3)$ , wobei  $\zeta_3$  eine primitive dritte Einheitswurzel bezeichne, und  $K_3$  der Zerfällungskörper von  $X^3 - 2$  über  $\mathbb{Q}$ .

- (i) Wie liegen die Körper  $K_i$  ineinander und welchen Index haben sie jeweils?
- (ii) Wie sehen die Ganzheitsringe  $\mathcal{O}_i$  der  $K_i$  aus?
- (iii) Wie zerfällt das Ideal (2) in den verschiedenen  $K_i$ ?
- (iv) Wie zerfällt (3) in den verschiedenen  $K_i$ ?
- (v) Geben Sie eine vollständige Liste aller Primzahlen an, die in  $K_i$  verzweigen.
- (vi) Finden Sie jeweils eine Primzahl, die in  $K_3$ 
  - Zerlegungsindex 2 und Trägheitsindex 3 hat;
  - Zerlegungsindex 3 und Trägheitsindex 2 hat;
  - vollständig zerlegt ist.

Wie zerlegen sich diese Primzahlen in  $K_1$  bzw.  $K_2$ ?

(vii) Gibt es Primzahlen, die in  $K_3$  vollständig träge sind?