Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

**Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,**
**WS 2012/2013**

**Problem 12.**
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \not\equiv 2 \bmod 4$, $\omega$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Sei weiter $l \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Untersuchen Sie die Primzerlegung von $l$ in $\mathcal{O}_K$ (d.h. des Ideals $l\mathcal{O}_K$) in den Fällen:
$(i)$ $n = 4$;
$(ii)$ $n = 3$;
$(iii)$ $n = 5$;
$(iv)$ $n = p$ eine beliebige Primzahl;
$(v)$ $n = p^r$, mit $r \in \mathbb{N}$, eine beliebige Primzahlpotenz.

*Hinweise:*
$(a)$ Verwenden Sie ohne Beweis: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ und $Gal(K \mid \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n)^*$.
$(b)$ Sei $f_n(X)$ das Minimalpolynom von $\omega$. Beschreiben Sie $f_n$ in den genannten Fällen.
$(c)$ Welche $l$ sind verzweigt in $K$?
$(d)$ Beschreiben Sie für $\mathrm{ggT}(n, l) = 1$ die Zerfällung von $f_n(X)$ modulo $l$ durch die multiplikative Ordnung der Restklasse von $n$ in $\mathbb{F}_l^* = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$. Verwenden Sie dabei, dass $\mathbb{F}_l^*$ zyklisch ist.