Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

Probleme der Algebraischen Zahlentheorie, WS 2012/2013

Problem 12.
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \not\equiv 2 \bmod 4$, ω eine primitive n-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Sei weiter $l \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Untersuchen Sie die Primzerlegung von l in $\mathcal{O}_K$ (d.h. des Ideals $l\mathcal{O}_K$) in den Fällen:
(i) $n = 4$;
(ii) $n = 3$;
(iii) $n = 5$;
(iv) $n = p$ eine beliebige Primzahl;
(v) $n = p^r$, mit $r \in \mathbb{N}$, eine beliebige Primzahlpotenz.

Hinweise:
(a) Verwenden Sie ohne Beweis: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ und $Gal(K \mid \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n)^*$.
(b) Sei $f_n(X)$ das Minimalpolynom von ω. Beschreiben Sie f_n in den genannten Fällen.
(c) Welche l sind verzweigt in K?
(d) Beschreiben Sie für $\mathrm{ggT}(n, l) = 1$ die Zerfällung von $f_n(X)$ modulo l durch die multiplikative Ordnung der Restklasse von n in $\mathbb{F}_l^* = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$. Verwenden Sie dabei, dass $\mathbb{F}_l^*$ zyklisch ist.