Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

1. Übung zu Algebra, SS 2012

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es sei $D : K[X] \to K[X]$ die Ableitungsabbildung mit k-ter Potenz D^k.
Finden und beweisen Sie eine Formel für $D^k(f \cdot g)$ (für zwei Polynome $f, g \in K[X]$).

Aufgabe 2. *(8 = 2 + 2 + 4 Punkte)*
Eine *Derivation* eines nicht notwendig kommutativen Rings A ist eine Abbildung $D : A \to A$ mit
(a) D ist ein Endomorphismus der additiven Gruppe $(A, +)$;
(b) Für alle $a, b \in A$: $D(a \cdot b) = D(a)b + aD(b)$.
Ist $K \subseteq Z(A)$ ein Unterring des Zentrums $Z(A)$ von K, so nennt man D eine K-*Derivation*, falls zusätzlich gilt:
(c) Für alle $k \in K$, $a \in A$: $D(ka) = kD(a)$.

Zeigen Sie:
(i) Sind D_1, D_2 Derivationen (K-Derivationen), so auch $D_1D_2 - D_2D_1$.
(ii) Die Derivation D ist K-Derivation genau dann, wenn gilt: $D|_K = 0$.
(iii) Ist K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und D eine K-Derivation von A, so auch D^p.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $A = K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten X über dem Körper K. Bestimmen Sie alle K-Derivationen von A.

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich jede K-Derivation von $A_0 = K[X]$ eindeutig zu einer Derivation von A fortsetzen lässt.

Aufgabe 4. *(12 Punkte)*
Es sei K ein Körper und A der Matrizenring $K^{n \times n}$, mit $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Jede K-Derivation von A ist von der Gestalt $D_Q : P \to PQ - QP$ mit einer Matrix $Q \in A$.

Abgabe am 25.04.2012 vor der Vorlesung