Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

10. Übung zu Algebra, SS 2012

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es sei K ein Körper, R der Polynomring $K[X]$, $V = K^n$ und φ ein K-Endomorphismus von V. Wir fassen V als R-Modul auf vermöge $f(X) \cdot v = (f(\varphi))(v)$ für $f(X) \in R$ und $v \in V$.
Unter welchen Voraussetzungen ist der R-Modul V einfach bzw. halbeinfach?

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Es sei R der Unterring der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Bestimmen Sie die Kommutante R' von R in $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe 3. *(25 Punkte)*
Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir setzen $S(M) := \sum M_i$, wobei M_i die einfachen R-Untermoduln von M durchläuft. Man nennt $S(M)$ den *Sockel* von M.
(i) Zeigen Sie, dass $S(M)$ der größte halbeinfache Untermodul von M ist.
(ii) Zeigen Sie: Jeder Homomorphismus $f : M \to N$ bildet $S(M)$ nach $S(N)$ ab.
(iii) Wir definieren eine aufsteigende Folge von Teilmengen von M durch

$$S_0(M) := 0, \qquad S_1(M) := S(M), \qquad S_{i+1}(M) := \pi_i^{-1}(S(M/S_i(M))),$$

wobei $\pi_i : M \to M/S_i(M)$, mit $i = 1, 2, \ldots$, die Restklassenabbildung bezeichne.
Zeigen Sie, dass die $S_i(M)$ Untermoduln sind, und verallgemeinern Sie (ii) auf die Folge der $S_i(M)$.
(iv) Berechnen Sie die Sockelreihe des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}/(n)$, wobei n die Primfaktorzerlegung

$$n = \prod p_i^{e_i}$$

besitze.
(v) Berechnen Sie die Sockelreihe des R-Moduls V aus Aufgabe 1.

Abgabe am 27.06.2012 vor der Vorlesung