Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

11. Übung zu Algebra,
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Wir betrachten $R := \mathbb{F}_2[S_2]$ und $S := \mathbb{F}_3[S_2]$ als Linksmoduln über sich selbst.
Rechnen Sie nach:
(i) R ist nicht halbeinfach.
(ii) S ist halbeinfach. Schreiben Sie S als direkte Summe von S-Untermoduln.

Aufgabe 2. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei R der von der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ erzeugte Unterring $\mathbb{R}[A]$.
(i) Zeigen Sie: $V := \mathbb{R}^2$ ist ein einfacher R-Modul.
(ii) Beschreiben Sie den Divisionsring $\mathrm{End}_R(V)$.

Aufgabe 3. *(20 = 5 · 4 Punkte)*
Es sei H der von $\mathbb{R}$ und den Matrizen A und B in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ erzeugte Unterring $\mathbb{R}[A, B]$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie für $i, j \geq 0$ die Produkte $A^i B^j$.
(ii) Bestimmen Sie eine $\mathbb{R}$-Basis von H und die Produkte der Basiselemente.
(iii) Zeigen Sie, dass H ein Divisionsring ist.
(iv) Zeigen Sie, dass $V = \mathbb{R}^4$ ein einfacher H-Modul ist.
(v) Bestimmen Sie $\mathrm{End}_H(V)$.

Hinweis zu (i)*:* Es ist $AB = -BA$.

Abgabe am 06.07.2016 vor der Vorlesung