Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

12. Übung zu Algebra,
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Ein R-Modul M heißt *unzerlegbar*, wenn aus $M = M_1 \oplus M_2$ folgt: $M_1 = 0$ oder $M_2 = 0$.
Zeigen Sie:
Jeder artinsche R-Modul ist endliche direkte Summe unzerlegbarer Moduln.

Aufgabe 2. *(20 = 2 + 9 + 9 Punkte)*
Es sei

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Q} \right\} .$$

Zeigen Sie:
(i) R ist ein Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(ii) R ist linksnoethersch, aber nicht rechtsnoethersch.
(iii) Untersuchen Sie, welchen Aussagen bzgl. linksartinsch, rechtsartinsch richtig sind.

Aufgabe 3. *(10 = 8 + 2 Punkte)*
Geben Sie Beispiele für
(i) einen R-Modul M, der artinsch, aber nicht noethersch ist;
(ii) einen R-Modul N, der noethersch, aber nicht artinsch ist.

Hinweis: Sie können $R = \mathbb{Z}$ wählen; dann sind M und N abelsche Gruppen.

Abgabe am 13.07.2016 vor der Vorlesung