Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

13. Übung zu Algebra,
SS 2012

Aufgabe 1. *(20 Punkte)*
Gegeben sei ein Körper K, ein Unterkörper L von K und ein Isomorphismus φ von K nach L. Auf der additiven Gruppe $R = K^2$ sei eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (\alpha, \beta) = (x\alpha, x\beta + y\varphi(\alpha))$$

gegeben.
(i) Finden Sie ein Beispiel für (K, φ, L) mit $K \neq L$.
(ii) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist.
(iii) Geben Sie alle Linksideale von R an. (Es sind genau 3, und daher ist R linksartinsch.)
(iv) Zeigen Sie, dass für jeden Unterraum V des L-Vektorraums K die Menge $\{0\} \times V$ ein Rechtsideal von R ist.
(v) Finden Sie (K, φ, L) mit $\dim_L(K) = \infty$.
(vi) Folgern Sie: Ist R wie in (v), so ist R weder rechtsartinsch noch rechtsnoethersch.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es sei K ein Körper und $m(x) \in K[x]$ ein Polynom.
Beschreiben Sie alle Jordan-Hölder-Reihen des $K[X]$-Moduls $K[x]/(m(x))$.
Welche Länge hat $K[x]/(m(x))$?

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $R \subseteq K^{n\times n}$ der Ring der oberen Dreiecksmatrizen über dem Körper K.
Geben Sie eine Jordan-Hölder-Reihe für den R-Modul K^n an und zeigen Sie, dass diese eindeutig bestimmt ist.
Wie lauten die Faktoren von K^n?

Bemerkung: Moduln, die genau eine Jordan-Hölder-Reihe besitzen, heißen *uniseriell*.

Abgabe am 18.07.2012 vor der Vorlesung