Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zu Algebra, SS 2012

Aufgabe 1. *(20 Punkte)*
Es sei $L \mid K$ eine algebraische Körpererweiterung.
Zeigen Sie:
(i) Sind D eine $K-$Derivation von L, $\alpha \in L$, und $f(X) \in K[X]$, so gilt:

$$D(f(\alpha)) = f'(\alpha)D(\alpha)\,.$$

(ii) Es seien $\alpha \in L$, f das Minimalpolynom von α über K, sowie $\beta \in K(\alpha)$. Genau dann gibt es eine $K-$Derivation D von $K(\alpha)$ mit $D(\alpha) = \beta$, wenn gilt:

$$f'(\alpha) \cdot \beta = 0\,.$$

(iii) L ist genau dann separabel über K, wenn er keine nichttrivialen $K-$Derivationen besitzt.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es seien $K_1 = \mathbb{F}_3(T)$ und $K_2 = \mathbb{F}_4(T)$ die Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_3$ bzw. $\mathbb{F}_4$, sowie

$$L_1 = K_1(\sqrt[3]{T})\,, \qquad L_2 = K_2(\sqrt[3]{T})\,.$$

Untersuchen Sie die Erweiterungen $L_1 \mid K_1$ und $L_2 \mid K_2$ auf Normalität und Separabilität.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Untersuchen Sie den Nullstellenkörper L des Polynoms $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$ auf Normalität und Separabilität über $\mathbb{Q}$.

Abgabe am 02.05.2012 vor der Vorlesung