Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

3. Übung zu Algebra, SS 2012

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es seien a, b rationale Zahlen, so dass a, b und ab keine Quadrate sind.
Bestimmen Sie die Galois-Gruppe des Polynoms $(X^2-a)(X^2-b)$, sowie alle Teilkörper des Zerfällungskörpers $L \mid \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. *(30 = 2 + 2 + 6 + 5 + 5 + 10 Punkte)*
Es sei q eine Primzahlpotenz, G die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ und $L = \mathbb{F}_q(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_q$.
Für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ und $f(T) \in L$ sei

$$f_\gamma(T) := f\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right) .$$

(i) Zeigen Sie: Für jedes $\gamma \in G$ ist $f \mapsto f_\gamma$ ein Körperautomorphismus von L.
(ii) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} L \times G & \longrightarrow & L\,; \\ (f, \gamma) & \longmapsto & f_\gamma \end{array}$$

ist eine rechte Operation von G auf L. Beschreiben Sie die zugehörige linke Operation.
Zur Vereinfachung sei ab jetzt $q = p$ eine Primzahl.
(iii) Beschreiben Sie alle Untergruppen H_1 von

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\} .$$

Welche Untergruppen H_1 sind normal, welche sind in H konjugiert?
(iv) Beschreiben Sie die Fixkörper L^H bzw. L^U zu H bzw.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_q \right\} .$$

(v) Verallgemeinern Sie (iv) für alle Untergruppen H_1 von H (bzw. für alle H_1, die Sie in (iii) gefunden haben).
(vi) Beschreiben Sie $K = L^G$. Verwenden sie dabei z.B., dass $G = \langle H, Z, w \rangle$ ist, mit $Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^* \right\}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Abgabe am 09.05.2012 vor der Vorlesung