Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

7. Übung zu Algebra,
SS 2012

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie die Galois-Gruppe über $\mathbb{Q}$ von $f(X) = X^5 - 6X + 4$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Irreduzibilität von f.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es sei K der Körper mit q Elementen (q eine Primzahlpotenz), L der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über K, und $m = [L : K]$.
Zeigen Sie, dass m die kleinste natürliche Zahl m' mit $n \mid q^{m'} - 1$ ist.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ separabel vom Grad n, mit r reellen und $2s$ komplexen Nullstellen.
Zeigen Sie, dass für die Diskriminante $D(f)$ gilt:

$$\operatorname{sgn}(D(f)) = (-1)^s\,.$$

Aufgabe 4. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
(i) Schreiben Sie, soweit möglich, die folgenden Ausdrücke aus $\mathbb{Q}(X,Y,Z)$ als rationale Funktionen über $\mathbb{Q}$ in den symmetrischen Polynomen s_1, s_2, s_3 (mit $s_i = s_i(X,Y,Z)$):

(1) $X^3Y + Y^3Z + Z^3X - XY^3 - YZ^3 - ZX^3\,;$
(2) $(X+Y)\cdot(X+Z)\cdot(Y+Z)\,;$
(3) $\frac{XY}{Z} + \frac{XZ}{Y} + \frac{YZ}{X}\,.$

(ii) Es sei $\alpha := XZ + YW \in \mathbb{Q}(X,Y,Z,W)$ gegeben.
Welchen Grad hat α über $K := \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3, s_4)$ (mit $s_i = s_i(X,Y,Z,W)$)?
Für welche Untergruppe $H \subseteq S_4$ gilt $K(\alpha) = \mathbb{Q}(X,Y,Z,W)^H$?

Abgabe am 06.06.2012 vor der Vorlesung