Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

9. Übung zu Algebra,

SS 2012

Aufgabe 1. *(20 Punkte)*
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $R := K^{n\times n}$.
Bestimmen Sie alle

- Linksideale,
- Rechtsideale,
- zweiseitigen Ideale

von R. Welche dieser Ideale sind maximal?

Hinweis: Es ist $V := K^n$ ein treuer R-Modul. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\mathfrak{a}_U := \{f \in R \mid f(U) = 0\} \qquad \text{ein Linksideal und}$$
$$\mathfrak{b}_U := \{f \in R \mid f(V) \subseteq U\} \qquad \text{ein Rechtsideal von } R.$$

Aufgabe 2. *(20 = 5 + 15 Punkte)* **Der Gruppenring** $K[G]$
Für einen Körper K und eine endliche Gruppe G der Ordnung n sei $K[G]$ der K-Vektorraum der Funktionen $f : G \to K$. Elemente aus $K[G]$ schreiben wir auch als formale Summe

$$f = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\,,$$

mit $a_\sigma = f(\sigma) \in K$.
(i) Für zwei Elemente f und g aus $K[G]$ definieren wir das Produkt (oder die Faltung) $f \cdot g : G \to K$ von f und g durch

$$f \cdot g(\sigma) := \sum_{\tau\upsilon=\sigma} f(\tau)g(\nu)\,.$$

Zeigen Sie, dass $K[G]$ dadurch zu einer K-Algebra wird.

Es sei nachfolgend $R := K[G]$ und n teilerfremd zur Charakteristik von K. Außerdem fassen wir stets R als R-Linksmodul auf.

(ii) Es sei U ein R-Untermodul von R mit Vektorraumkomplement V in R und $\pi : R \to U$ die entsprechende Projektion im Sinne von K-Vektorräumen. Wir bilden daraus die K-lineare Abbildung $\phi : R \to R$, gegeben durch

$$\phi(x) := \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot \pi(\sigma^{-1} \cdot x)\,,$$

mit $x \in R$.
Zeigen Sie, dass ϕ sogar ein R-Modulhomomorphismus ist, der nicht von der Wahl von V abhängt.

Abgabe am 20.06.2012 vor der Vorlesung