Lösungen 10.Übung Algebra II

Stand: 15. Juni 2001

B12 A2

1.Aufgabe

a) Nachrechnen.

b) Wir müssen zeigen

$$\mathfrak{a} \text{ Ideal in } R \iff \mathfrak{a} = Rp^m\ .$$

Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $v_p(n) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid n \equiv 0 \mod p^k\}$, und für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ sei $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$. Weiter setzen wir $v_p(0) := \infty$. Es ist also $R = \{z \in \mathbb{Q} \mid v_p(z) \geq 0\}$.

(i) "$\Leftarrow$":klar.

(ii) "$\Rightarrow$': Es sei $m := \min\{v_p(\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{a}\} \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\mathfrak{a} = Rp^m\ .$$

"$\subseteq$": Sei $p^n\frac{a}{b}$ mit ($ab \not\equiv 0 \mod p$) aus $\mathfrak{a}$ beliebig. Dann gilt

$$p^n\frac{a}{b} = p^m(p^{n-m}\frac{a}{b}) \overset{(n-m)\geq 0}{\in} p^mR\ .$$

"$\supseteq$": Sei $\alpha \in \mathfrak{a}$ mit $v_p(\alpha) = m$. Dann ist $\alpha = p^m\frac{a}{b}$ mit ($ab \not\equiv 0 \mod p$). Dann ist aber auch $\frac{b}{a}$ aus R. Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, ergibt sich

$$(p^m\frac{a}{b}) \cdot (\frac{b}{a}) = p^m \in \mathfrak{a}\ ,$$

also $\mathfrak{a} \supseteq Rp^m$.

c)

$$J(R) = \bigcap_{I\ max.\ LI} I \overset{(b)}{=} Rp\ .$$

d) $\mathbb{Q}$ ist als R-Modul nicht endlich erzeugt.
Bew:Sei $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{Q} - \{0\}$ und $M = \sum_{i=1}^n R\beta_i$. Dann gilt

$$m := \min\{v_p(\alpha) \mid \alpha \in M\} = \min\{v_p(\beta_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \text{ endlich.}$$

Also ist $p^{m-1} \notin M$, also $M \neq \mathbb{Q}$. □
Da $\mathbb{Q}$ als R-Modul nicht endlich erzeugt ist, ist das Lemma von Nakayama in dieser Situation nicht anwendbar.

B13 A1

2.Aufgabe

a) Es sei F ein Körper und $F(T)$ der rationale Funktionkörper in der Variablen T über F. Dann ist $K = F(T)$, $L = F(T^2)$ und $\varphi : K \to L, \quad f(T) \mapsto f(T^2)$ ein Beispiel.

b) Es sei $R := K^2$. Wir betrachten die injektive Abbildung

$$\iota : K^2 \to Mat(2,K), \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \varphi(x) \end{pmatrix}$$

und $M := Bild(\iota) \subset Mat(2,K)$. Es ist $\iota(a+b) = \iota(a) + \iota(b)$, und mit der Multiplikation aus der Aufgabenstellung gilt auch $\iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$. Man zeigt leicht, daß M ein Unterring von $Mat(2,K)$ ist, und daher ist auch R ein Ring mit $1_R = (1,0)$. Weiter sehen wir, daß $(x,y) \in \mathbb{R}$ genau dann Einheit ist, wenn $x \neq 0$ gilt. In diesem Fall folgt

$$(x,y)^{-1} = \iota^{-1}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \varphi(x) \end{pmatrix}^{-1}\right) = \iota^{-1}\left(\frac{1}{x\varphi(x)}\begin{pmatrix} \varphi(x) & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x\varphi(x)}\right)\ .$$

c) Sei $0 \neq \mathfrak{a} \neq R$ ein Linksideal, d.h. $R\mathfrak{a} = R$ und $0 \neq (x,y) \in \mathfrak{a}$.
Sei $x \neq 0$, d.h. (x,y) invertierbar in R. Dann ist $1_R = (x,y) \cdot (x,y)^{-1} \in \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{a} = R$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist $\mathfrak{a} \subseteq 0 \times K$. Ist $0 \neq (0,y) \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a} \subseteq 0 \times K = R \cdot (0,y) \subseteq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = 0 \times K$.
Die Linksideale von R sind daher

$$0, \quad 0 \times K, \quad R\,.$$

d) Sei $V \subset K$ ein L-Vektorraum und $v \in V$ beliebig. Für alle $(x,y) \in R$ gilt dann

$$(0,v) \cdot (x,y) = \iota^{-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & \varphi(x) \end{smallmatrix}\right)\right) = \iota^{-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & \varphi(x)v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = (0, \varphi(x)v) \overset{\varphi(x)\in L}{\in} 0 \times V\,.$$

e) Sei F ein beliebiger Körper und $K = F(T_i \mid i \in \mathbb{N})$ der rationale Funktionenkörper in den unendlich vielen Unbestimmten $\{T_i, i \in \mathbb{N}\}$. Als L wählen wir $K = F(T_i \mid i \in 2\mathbb{N})$ und φ sei die lineare Abbildung, die auf den T_i durch $\varphi : K \to L, \quad T_i \mapsto T_{2i}$ bestimmt ist.

f) Sei $(K, \varphi, L) = (F(T_i \mid i \in \mathbb{N}), \varphi, (F(T_i \mid i \in 2\mathbb{N})$ wie in (e).

  (i) Es sei $V_n := F(T_i \mid i \in \{1, \dots, n\} \cup 2\mathbb{N})$. Da $V_n \subset V_{n+1}$ ist, ist

  $$(0 \times V_1) \subset (0 \times V_2) \subset \dots$$

  eine echt aufsteigende, unendliche Folge von Rechtsidealen, und daher ist R nicht rechtsnoethersch.

  (ii) Es sei $W_n := F(T_i \mid i \in \{n+1, n+2, \dots\} \cup 2\mathbb{N})$. Dann ist $W_n \supset W_{n+1}$ und daher ist

  $$(0 \times W_1) \supset (0 \times W_2) \supset \dots$$

  eine unendliche, echt absteigende Folge von Rechtsidealen, also ist R auch nicht rechtsartinsch.

Lösungen 11.Übung Algebra II
Stand: 27. Juni 2001

B13 A2

(**1.Aufgabe**) Sei K ein Körper und $m(x) \in K[x]$ ein Polynom. Weiter sei

$$m(x) = \alpha \prod_{i=1}^{r} p_i(x)^{e_i}$$

die Zerlegung von $m(x)$ in normierte Primpolynome und $\alpha \in K^*$. Weiter sei $l := \sum_{i=1} re_i$. Alle $K[x]$-Untermoduln von $K[x]/(m(x))$ sind von der Form $(n(x) \cdot K[x])/(m(x)$, wobei $n(x)$ ein normierter Teiler von $m(x)$ ist. D.h. jeder Folge von normierten Teilern

$$1 \mid n_1(x) \mid n_2(x) \mid \ldots \mid n_k(x) = m(x)$$

mit $\frac{n_{i+1}}{n_i}$ prim, kann genau eine Jordan-Hölder-Reihe

$$(1 \cdot K[x])/(m(x)) \supset (n_1(x) \cdot K[x])/(m(x)) \supset \ldots \supset (n_k(x) \cdot K[x])/(m(x))$$

zugeordnet werden, und jede Jordan-Hölder-Reihe ist von dieser Form. Also entsprechen die Jordan-Hölder-Reihen genau den Folgen

$$\{(n_i)_{i=1}^{l} \mid n_1(x) prim, m(x) \equiv 0 \bmod n_i(x)\ \forall 1 \leq i \leq n,\ \left(\frac{n_{i+1}(x)}{n_i(x)}\right)\ prim \forall 1 \leq i \leq (n-1)\}\ .$$

Insbesondere hat $K[x]/(m(x))$ die Länge $l = \sum_{i=1}^{r} e_i$ und die Menge der Faktoren lautet

$$\{K[x]/(p(x)) \mid p(x)\ prim, m(x) \equiv 0 \bmod p(x)\}$$

B13 A3

(**2.Aufgabe**) Es sei R der Ring der oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper K. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des K^n und $V_i := \langle e_1, \ldots, e_i \rangle_K$. Dann ist jedes V_i ein R-Untermodul von K^n und

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = K^n$$

ist eine endliche aufsteigende Folge von Untermoduln. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$V_i/V_{i-1} \cong K\ .$$

D.h. jeder Quotient ist einfach und daher ist die obige Reihe eine Jordan-Hölder-Reihe. Insbesondere hat der R-Modul K^n die Länge n und alle Faktoren sind isomorph zu K.

3.Aufgabe In der 8. Übung, Aufgabe 1 wurden alle Linksideale (d.h. die R-Untermoduln von R) klassifiziert. Für $0 \leq i \leq n$ sei $M_i \subseteq R$ die Menge aller Matrizen, die in den Spalten 1 bis $n-i$ nur Einträge gleich Null haben. Dann ist

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = R$$

eine echt aufsteigende Folge von R-Untermoduln von R. Da für alle i

$$M_i/M_{i-1} \cong K^n$$

gilt und da K^n ein einfacher R-Modul ist, ist die obige Reihe sogar eine Jordan-Hölder Reihe des R-Moduls R. Also hat R die Länge n und alle Faktoren sind isomorph zu K^n.