Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

1. Übung zu Algebra
SS 2016

Aufgabe 1. *(15 = 3 + 2 + 10 Punkte)*
Es sei A ein nicht notwendig kommutativer Ring.
Eine Abbildung $D : A \to A$ heißt *Derivation*, wenn gilt:
(a) D ist ein Endomorphismus der additiven Gruppe $(A, +)$;
(b) Für alle $a, b \in A$: $D(a \cdot b) = aD(b) + D(a)b$.
Ist $K \subseteq Z(A)$ ein Unterring des Zentrums $Z(A)$ von K, so heißt D eine K-*Derivation*, falls zusätzlich gilt:
(c) Für alle $k \in K$, $a \in A$: $D(ka) = kD(a)$.

Zeigen Sie:
(i) Sind D_1, D_2 Derivationen (K-Derivationen), so auch $D_1D_2 - D_2D_1$.
(ii) Die Derivation D ist K-Derivation genau dann, wenn gilt: $D\,|_K = 0$.
(iii) Ist K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und D eine K-Derivation von A, so auch D^p.

Aufgabe 2. *(15 Punkte)*
Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
(i) Jedes $a \in K$ ist p-te Potenz.
(ii) Jede endliche Körpererweiterung von K ist separabel.
Körper, welche diese Bedingungen erfüllen, heißen *perfekt*.

Aufgabe 3. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei $A = K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten X über dem Körper K.
(i) Zeigen Sie, dass sich alle K-Derivationen von $A_0 = K[X]$ eindeutig auf A fortsetzen lassen.
(ii) Bestimmen Sie die Menge aller K-Derivationen von A.

Abgabe am 27.04.2016 vor der Vorlesung