Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

10. Übung zu Algebra,
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Es seien K ein Körper, $V = K^n$, φ ein K-Endomorphismus von V und R die von φ erzeugte K-Unteralgebra von $\mathrm{End}_K(V) = K^{n\times n}$.
Unter welchen Voraussetzungen ist der R-Modul V einfach bzw. halbeinfach?

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Es sei R der Unterring der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$, K ein Körper.
Bestimmen Sie die Kommutante R' von R in $K^{n\times n}$.

Aufgabe 3. *(25 = 5 · 5 Punkte)*
Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir setzen $S(M) := \sum M_i$, wobei M_i die einfachen R-Untermoduln von M durchläuft. Man nennt $S(M)$ den *Sockel* von M.
(i) Zeigen Sie, dass $S(M)$ der größte halbeinfache Untermodul von M ist.
(ii) Zeigen Sie: Jeder Homomorphismus $f : M \to N$ bildet $S(M)$ nach $S(N)$ ab.
(iii) Wir definieren eine aufsteigende Folge von Teilmengen von M durch

$$S_0(M) := 0, \qquad S_1(M) := S(M), \qquad S_{i+1}(M) := \pi_i^{-1}(S(M/S_i(M)))\,,$$

wobei $\pi_i : M \to M/S_i(M)$, mit $i = 1, 2, \ldots$, die Restklassenabbildung bezeichne.
Zeigen Sie, dass die $S_i(M)$ Untermoduln sind, und verallgemeinern Sie (ii) auf die Folge der $S_i(M)$.
(iv) Berechnen Sie die Sockelreihe des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}/(n)$, wobei n die Primfaktorzerlegung

$$n = \prod p_i^{e_i}$$

besitze.
(v) Berechnen Sie die Sockelreihe des R-Moduls V aus Aufgabe 1.

Abgabe am 29.06.2016 vor der Vorlesung