Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

13. Übung zu Algebra,
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 2 + 4 + 4 Punkte)*
Es sei p eine Primzahl und $R = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b\}$.
Zeigen Sie:
(i) R ist Unterring von $\mathbb{Q}$.
(ii) Alle Ideale von R sind von der Form Rp^n, mit $n \in \mathbb{N}_0$.
(iii) Bestimmen Sie das Jacobson-Radikal $J = J(R)$.

Aufgabe 2. *(15 = 5 + 10 Punkte)*
Es sei R der Ring $\mathbb{Z}/p^k$ zu einem Primideal p und $k \geq 2$, sowie M ein freier R-Modul des Rangs n (d.h. $M \cong R^n$).
Weiter sei (p) das von der Klasse von p erzeugte Ideal in R und

$$\begin{array}{cccc} \pi : & M & \longrightarrow & M/(p)M \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

der kanonische Homomorphismus.
Zeigen Sie:
(i) Jede Basis von M besitzt genau n viele Elemente.
(ii) Ist $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ so, dass $\overline{X} = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ eine $R/(p)$-Basis von $M/(p)M$ ist, so ist X schon R-Basis von M.

Aufgabe 3. *(15 = 3 + 3 + 4 + 5 Punkte)*
Es sei V ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum, $E = \mathrm{End}_K(V)$ und

$$I = \{f \in E \mid \dim(f(V)) < \infty\}.$$

Zeigen Sie:
(i) I ist ein zweiseitiges Ideal von E.
(ii) $R = K \cdot \mathrm{id}_V + I$ ist Unterring von E.
(iii) V ist ein einfacher R-Modul.
(iv) Ist R artinsch oder noethersch?

Abgabe am 20.07.2016 vor der Vorlesung