Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zu Algebra
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 2 + 3 + 5 Punkte)*
Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.
Zeigen Sie:
(i) $K^p := \{a^p \mid a \in K\}$ ist ein zu K isomorpher Unterkörper von K.
(ii) $K \mid K^p$ ist rein inseparabel.
(iii) Finden Sie Beispiele für Körper K mit $[K : K^p] = p, p^2, p^3, \ldots$.

Aufgabe 2. *(10 = 2 + 3 + 2 + 3 Punkte)*
Es sei $f = X^3 + aX^2 + (a-3)X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $a \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie
(i) f hat keine rationale Nullstelle.
(ii) Ist β eine Nullstelle von f, so auch $\frac{-1}{1+\beta}$.
(iii) Durch $\sigma : x \mapsto \frac{-1}{1+x}$ wird eine fixpunktfreie Bijektion der Ordnung 3 von $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ auf sich gegeben.
(iv) Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f (d.h., des Zerfällungskörpers von f) über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. *(20 = 10 · 2 Punkte)*
Gegegeben sei ein Körper K und ein Polynom $f(X) \in K[X]$.
Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f über K und den Grad der Erweiterung.

	K	$f(X) \in K[X]$
(i)	$\mathbb{Q}$	$X^5 - 1$
(ii)	$\mathbb{Q}$	$X^4 + X^2 + 1$
(iii)	$\mathbb{Q}$	$X^3 - 8$
(iv)	$\mathbb{Q}$	$X^3 - 2$
(v)	$\mathbb{Q}(i)$	$X^3 - 2$
(vi)	$\mathbb{Q}$	$(X^3 - 2)(X^2 - 3)$
(vii)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$X^4 - 2$
$(viii)$	$\mathbb{F}_{17}$	$X^3 - 3X^2 - 3X - 8$
(ix)	$\mathbb{F}_{991}$	$X^2 - X + 1$
(x)	$\mathbb{F}_4$	$1 + 2X + 2X^2 + 2X^3 + X^4 + X^5$

Abgabe am 04.05.2016 vor der Vorlesung