

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1, Mathematik  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
M.Sc. Philipp Stopp



### 3. Übung zu Algebra SS 2016

**Aufgabe 1.** (20 = 8 + 8 + 4 Punkte)

Es sei  $p \in \mathbb{P}$  und  $f \in \mathbb{Q}[X]$  irreduzibel vom Grad  $p$ .

Zeigen Sie:

(i) Enthält die Galoisgruppe von  $f$  ein Element der Ordnung  $p$  und eine Transposition, so ist sie die Symmetrische Gruppe  $S_p$ .

(ii) Hat  $f$  genau zwei nicht reelle Nullstellen in  $\mathbb{C}$ , dann ist die Galoisgruppe von  $f$  die Gruppe  $S_p$ .

(iii) Es ist  $g = X^5 - 80X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$  irreduzibel und es gilt für den Zerfällungskörper  $L$  von  $g$  über  $\mathbb{Q}$ :

$$\text{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong S_5.$$

**Aufgabe 2.** (10 Punkte)

Es sei  $p \in \mathbb{P}$ .

Zeigen Sie:

Das Polynom  $f(X) = X^p - X + a$  mit  $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$  ist in  $\mathbb{F}_p[X]$  irreduzibel.

**Aufgabe 3.** (10 Punkte)

Es seien  $a, b$  rationale Zahlen, so dass  $a, b$  und  $ab$  keine Quadrate sind.

Bestimmen Sie die Galois-Gruppe des Polynoms  $(X^2 - a)(X^2 - b)$ , sowie alle Teilkörper des Zerfällungskörpers  $L \mid \mathbb{Q}$ .

Abgabe am 11.05.2016 vor der Vorlesung