Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

4. Übung zu Algebra
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 1 + 5 + 4 Punkte)*
Es sei $f(x) = X^3 + aX + b \in K[X]$ irreduzibel mit Koeffizienten a, b in einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ und den drei (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen x_1, x_2, x_3 im algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K.
Die *Diskriminante* $D(f)$ ist definiert als $D(f) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.
Zeigen Sie:
(i) $D(f) \in K$.
(ii) Die Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(f)$ ist genau dann in A_3 enthalten, wenn $D(f)$ in K ein Quadrat ist.
(iii) Es gilt: $D(f) = -4a^3 - 27b^2$.

Aufgabe 2. *(30 Punkte)*
Beschreiben Sie drei verschiedene Galois-Erweiterungen K von $\mathbb{Q}$ mit zyklischer Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(K \mid \mathbb{Q})$ der Ordnung 5 durch Angabe erzeugender Elemente $\lambda \in K$. (Sie dürfen das Minimalpolynom $f(X) = m_\lambda(X)$ ausrechnen, müssen es aber nicht!)
Verallgemeinern Sie wenigstens eine Ihrer Methoden für beliebige Primzahlen p statt $p = 5$.

Abgabe am 18.05.2016 vor der Vorlesung