Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

8. Übung zu Algebra
SS 2016

Aufgabe 1. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es seien α eine komplexe Wurzel von $f(X) = X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ und K ein Zerfällungskörper von f.
(i) Ist $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$ bzw. in K?
(ii) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$ keine Automorphismen außer der Identität besitzt.

Aufgabe 2. *(20 = 5 + 15 Punkte) Der Gruppenring $K[G]$*
Für einen Körper K und eine endliche Gruppe G der Ordnung n sei $K[G]$ der K-Vektorraum der Funktionen $f : G \to K$. Elemente aus K[G] schreiben wir auch als formale Summe

$$f = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$$

mit $a_\sigma = f(\sigma) \in K$.
(i) Für zwei Elemente f und g aus $K[G]$ definieren wir das Produkt (oder die Faltung) $f \cdot g : G \to K$ von f und g durch

$$f \cdot g(\sigma) := \sum_{\tau\upsilon=\sigma} f(\tau)g(\upsilon)\,.$$

Zeigen Sie, dass $K[G]$ dadurch zu einer K-Algebra wird.

Es sei nachfolgend $R := K[G]$ und n teilerfremd zur Charakteristik von K.
Außerdem fassen wir stets R als R-Linksmodul auf.

(ii) Es sei U ein R-Untermodul von R mit Vektorraumkomplement V in R und $\pi : R \to U$ die entsprechende Prokjektion im Sinne von K-Vektorräumen.
Wir bilden daraus die K-lineare Abbildung $\phi : R \to R$, gegeben durch

$$\phi(x) := \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot \pi(\sigma^{-1} \cdot x)\,,$$

mit $x \in R$.
Zeigen Sie, dass ϕ sogar ein R-Modulhomomorphismus ist, dessen Kern ein R-Modul-Komplement von U in R ist.

- Bitte wenden -

Aufgabe 3. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Linksideal.
(i) Zeigen Sie: $\tilde{\mathfrak{a}} := \{b \in R \mid \forall r \in R : br \in \mathfrak{a}\}$ ist ein zweiseitiges Ideal von R, es gilt $\tilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$, und jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{b}$ von R mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ erfüllt schon $\mathfrak{b} \subset \tilde{\mathfrak{a}}$.
(ii) Es sei $M = Rx$ ein zyklischer R-Modul und $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$. Beschreiben Sie $\mathrm{Ann}(M)$.

Abgabe am 15.06.2016 vor der Vorlesung