Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

2. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)
Seien X und Y nichtleere Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, für die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, für die $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$

(ii) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q};\ (z, n) \mapsto \frac{z}{n}$

(iii) X sei die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ und

$$\begin{array}{rcl} h : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ Y & \mapsto & X \setminus Y \end{array}$$

(b) Geben Sie jeweils eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die

(i) injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(ii) surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 3: (*12 Punkte*)
Seien $f : Y \to Z$ und $g : X \to Y$ Abbildungen, und sei $h := f \circ g$ die Komposition von f und g. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Implikationen:

(a)	f und g sind injektiv.	$\Rightarrow$	h ist injektiv.
(b)	f und g sind surjektiv.	$\Rightarrow$	h ist surjektiv.
(c)	f und g sind bijektiv.	$\Rightarrow$	h ist bijektiv.
(d)	h ist injektiv.	$\Rightarrow$	f und g sind injektiv.
(e)	h ist surjektiv.	$\Rightarrow$	f und g sind surjektiv.
(f)	h ist bijektiv.	$\Rightarrow$	f und g sind bijektiv.

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, die durch

$$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

definiert wird, eine Äquivalenzrelation ist.
Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. In welchem Zusammenhang steht $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

(a) Zeigen Sie: Für jede Abbildung $f : X \to Y$ und alle Teilmengen $A, B \subseteq Y$ gilt:

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(iii) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede Abbildung $f : X \to Y$ und alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(iii) $f(X \setminus B) = Y \setminus f(B)$

Alle Antworten sind grundsätzlich zu begründen!

Abgabe am Freitag, 30.04.2010 vor der Vorlesung