Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

3. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*6+10+4=20 Punkte*)
Für die gesamte Aufgabe seien stets $k, n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir definieren $n! := \prod_{1 \leq i \leq n} i$ (sprich „n Fakultät") für $n \geq 1$ und $0! := 1$, und weiter

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(b) Sei nun $\mathbb{N}(n) := \{1, 2, , \ldots, n\}$. (Insbesondere also $\mathbb{N}(0) = \emptyset$.) Wir definieren für eine beliebige Menge X:

$$\mathcal{P}_k(X) := \{S \subseteq X \mid \#S = k\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$|\mathcal{P}_k(\mathbb{N}(n))| = \binom{n}{k}$$

gilt.

(c) Folgern Sie aus (b), dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Aufgabe 3: (*2+3+3+4=12 Punkte*)

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2.$$

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)

Untersuchen Sie den folgenden Beweis auf Korrektheit.

Wir wollen mit vollständiger Induktion beweisen, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben. Dazu genügt es offenbar, für jede natürliche Zahl n die Aussage

$D(n) :=$ „In jeder Menge von n Pferden haben alle Pferde dieselbe Farbe.“

zu zeigen.
Die Aussage $D(1)$ ist offenbar richtig.
Wir müssen also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Implikation

$$D(n) \Rightarrow D(n+1)$$

beweisen.
Es gelte $D(n)$. Um $D(n+1)$ zu beweisen, geben wir uns eine beliebige Menge $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ von $n+1$ Pferden vor. Wir wollen zeigen, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir die Mengen $M_1 := \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ und $M_2 := \{P_2, P_3 \ldots, P_n, P_{n+1}\}$. Beides sind Mengen von n Pferden. Wenden wir unsere Voraussetzung $D(n)$ auf M_1 an , so sehen wir, dass die Pferde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dieselbe Farbe haben. Andererseits haben aber – ebenfalls nach unserer Voraussetzung – auch die Pferde $P_2, P_3 \ldots, P_n, P_{n+1}$ aus M_2 dieselbe Farbe. Insgesamt sehen wir also, dass alle Pferde aus M dieselbe Farbe haben wie P_n. Also haben alle Pferde aus M dieselbe Farbe, was zu zeigen war.

Alle Antworten sind grundsätzlich zu begründen!

Abgabe am Freitag, 07.05.2010 vor der Vorlesung