Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

# 4. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

---

**Aufgabe 1**: (*10 Punkte*)
Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig. Zeigen Sie:
Es gibt genau eine reelle Zahl $y \geq 0$ mit $y^2 = x$.

---

**Aufgabe 2**: (*4+6+10=20 Punkte*)

*(a)* Seien $a, b, \geq 0$. Zeigen Sie:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

*(b)* Sei $a \geq 1$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{a} \leq x \leq a$ gilt

$$x + \frac{1}{x} \leq a + \frac{1}{a}.$$

*(c)* Seien $0 < x_1 \leq \ldots \leq x_n$, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.
Zeigen Sie die *Ungleichung von Kantorovich*:

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x_k}\right) \leq \left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right)^2 \frac{1}{x_1 x_n}.$$

*Hinweis:* Zeigen Sie die Behauptung zunächst für den Spezialfall $x_1 x_n = 1$, indem Sie Teil (a) auf die linke Seite anwenden. Für den allgemeinen Fall nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe 1.

---

**Aufgabe 3**: (*6+4+4+6=20 Punkte*)

*(a)* Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$$

erfüllen.

*(b)* Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung

$$|z+1| \leq |z+i|$$

erfüllen.

*(c)* Seien $z := 3 + 4i$ und $w := \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Berechnen Sie $z^{-1}$ und $w^3$.

*(d)* Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung

$$z^2 - 3iz - i - 3 = 0$$

erfüllen.

---

**Abgabe am Freitag, 14.05.2010 vor der Vorlesung**