Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

5. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*3+3+2+2+2=12 Punkte*)

(a) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nicht leer. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \sup(X \cup Y) & = & \max\{\sup X, \sup Y\}; \\ \text{(ii)} & \sup(X + Y) & = & \sup X + \sup Y. \end{array}$$

Dabei sei $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.
Wie sehen die Formeln aus, wenn eine (oder beide) der Mengen X, Y nach oben unbeschränkt ist?

(b) Bestimmen Sie $\sup X$ und $\inf X$ für folgende Mengen X:

(i) $X := \left\{(-1)^n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$;

(ii) $X := \left\{n - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$;

(iii) $X := \{t \in \mathbb{R} \mid -7 < t \leq -3 \text{ oder } -2 \leq t \leq 2\}$.

Wann liegt jeweils ein Maximum oder Minimum vor?

Aufgabe 2: (*3+5=8 Punkte*)

Die *Fibonacci-Zahlen* $(F_n)_{n\geq 0}$ (nach Leonardo von Pisa, Sohn (lat. filius) des Bonacci) werden durch die folgenden Bedingungen rekursiv definiert:

$$F_0 := 0$$

$$F_1 := 1$$

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass man die n-te Fibonacci Zahl mit folgender Formel auch direkt berechnen kann:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ existiert und berechnen Sie ihn.

Aufgabe 3: (*4+4+4+2=14 Punkte*)

(a) Zeigen Sie für $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $2 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Gilt die erste Ungleichung auch für $k = 0, 1$?

(b) Zeigen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(c) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Hinweis zu b): binomischer Satz; zu c): binomischer Satz und geometrische Summenformel

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gegen eine Zahl $e \in [2, 3]$ konvergiert.

Aufgabe 4: (*2+2+2+2+2+2+2+2=16 Punkte*)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (eventuell uneigentlich) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Sei weiter $t \in \mathbb{R}_{<0}$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{rlcll}
(a) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) & = & \infty. & \\
(b) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) & = & 0. & \\
(c) & \lim\limits_{n\to\infty} (ta_n) & = & \infty. & \\
(d) & \lim\limits_{n\to\infty} (tc_n) & = & \infty. & \\
(e) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) & = & \infty, & \text{falls } b > 0. \\
(f) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) & = & 0, & \text{falls } b = 0. \\
(g) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) & = & 1, & \text{falls } b = 0. \\
(h) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) & = & \infty, & \text{falls } b = 0.
\end{array}$$

Abgabe am Freitag, 21.05.2010 vor der Vorlesung