Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

6. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*2+2+2+2+2+2+2=14 Punkte*)
Entscheiden Sie für die nachstehenden Folgen, ob sie (eigentlich oder uneigentlich) konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $\left(\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(b) $((-1)^n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$
(c) $\left(\frac{\sqrt{3n^2+2n}}{n-2}\right)_{n\geq 3}$
(d) $\left(\frac{(-1)^n\cdot 12n+4}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(e) $\left(\frac{2n^2(-1)^{n+1}-n\sqrt{n}+5}{n^2-4n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 17}$
(f) $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(g) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2: (*3+4+1+4=12 Punkte*)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_n = 1 + \frac{1}{3 - a_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge wohldefiniert ist, dass also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \neq 3$.
Hinweis: Zeigen Sie $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Zeigen Sie, dass die Folge streng monoton wachsend ist.
(c) Zeigen Sie, dass die Folge gegen einen Grenzwert konvergiert.
(d) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + x^2}$$

konvergent bzw. absolut konvergent?

Aufgabe 4: (*8+3+3=14 Punkte*)

(a) Zeigen Sie das *Verdichtungskriterium*:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

(b) Können Sie die Zahl 2 bei dem Verdichtungskriterium durch eine andere natürliche Zahl > 1 ersetzen?

(c) Zeigen Sie, dass für alle $q > 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

konvergiert.

Abgabe am Freitag, 28.05.2010 vor der Vorlesung