Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

7. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Geben Sie eine Folge reeller Zahlen an, die unendlich viele Häufungspunkte hat.

Aufgabe 2: (*8+2=10 Punkte*)

(a) Sei $q \neq 1$ eine beliebige reelle oder komplexe Zahl. Finden und beweisen Sie eine geschlossene Formel für
$$\sum_{k=1}^{n} kq^k.$$

(b) Sei nun $|q| < 1$. Berechnen Sie
$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k.$$

Hinweis zu (a): Beweisen und benutzen Sie die Gleichung
$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} q^k.$$

Alternativ können Sie die Formel auch erraten und mit vollständiger Induktion beweisen.

Aufgabe 3: (*6+4=10 Punkte*)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen derart, dass der Grenzwert $c := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ existiert. Zeigen Sie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert.}$$

(b) Untersuchen Sie die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^3-3n^2+2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-n}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4: (*4+4+4=12 Punkte*) Für alle $n, k \geq 0$ sei

$$a_{n,k} := (-1)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor k/2 \rfloor + \lfloor (n+1)/2 \rfloor},$$

wobei mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet wird, die $\leq x$ ist („x abgerundet“).

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Zeigen Sie: Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$

konvergieren. Berechnen Sie jeweils den Grenzwert.

Hinweis: Schreiben Sie die ersten Glieder (ca. $k, n \leq 5$) in ein quadratisches Diagramm.

Aufgabe 5: (*2+2+2+2=8 Punkte*)
Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+2x^2+3x+2}{x+1}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{9}{x} \left(\frac{3}{(x+3)^3} - \frac{1}{9} \right)$.

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^8 + 4} - x^4$.

Abgabe am Freitag, 04.06.2010 vor der Vorlesung