Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dr. Johannes Lengler

8. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-beschränkt ist.

Aufgabe 2: (*2+3+3=8 Punkte*)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \max(x, 0); \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 + \frac{1}{2}x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}; \qquad h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Aufgabe 3: (*4+4+4+4+4=20 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall stetig ist.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{(x-1)\exp(6x^2 - 2x) + 3}{x^3 - x^2 + x - 1}. \\ f_2(x) &= \begin{cases} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{\lfloor x \rfloor})}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - x, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \\ f_4(x) &= \sqrt{x}(x - \lfloor x \rfloor). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (*3+6+3=12 Punkte*)
Eine *Norm* auf $V := \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$|| \; || : V \to \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

1. $||x|| \geq 0$ für alle $x \in V$, und $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $||tx|| = |t| \cdot ||x||$ für alle $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in V$.

Zeigen Sie: Die Abbildungen $|| \; ||_1$, $|| \; ||_2$ und $|| \; ||_\infty$, definiert durch

$$\begin{aligned} ||\underline{x}||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ ||\underline{x}||_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \\ ||\underline{x}||_1 &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, sind Normen auf V.
Hinweis zu (ii): Beweisen Sie die Dreicksungleichung erst für die Fälle $n = 1, 2$ und benutzen Sie dann vollständige Induktion nach n.

Abgabe am Freitag, 11.06.2010 vor der Vorlesung